Licenciatura en Nutrición

MATEMÁTICA

2020

UNCAUS
UNIVERSIDAD NACIONAL DEL CHACO AUSTRAL

ÍNDICE

MÓDULO 1: CONJUNTOS NUMÉRICOS 5

1. NÚMEROS NATURALES 6

2. NÚMEROS ENTEROS 6

OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS 6

ADICIÓN 7
DIFERENCIA 7
PRODUCTO 7
COCIENTE 8

3. NÚMEROS RACIONALES 8

OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES 10

SUMA Y DIFERENCIA DE FRACCIONES 11
PRODUCTO DE FRACCIONES 12
DIVISIÓN DE FRACCIONES 12

4. NÚMEROS IRRACIONALES 12

5. NÚMEROS REALES 13

REPRESENTACIÓN GEOMÉTRICA DE LOS NÚMEROS REALES 13
OPERACIONES CON NÚMEROS REALES 13
PROPIEDADES DE LAS OPERACIONES DE ADICIÓN Y PRODUCTO 13
ORDEN DE LAS OPERACIONES 14

POTENCIACIÓN 15

DEFINICIÓN DE POTENCIA DE EXPONENTE NATURAL 15
POTENCIA DE EXPONENTE ENTERO 16
POTENCIA DE EXPONENTE RACIONAL 17
PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN 17

NOTACIÓN CIENTÍFICA 19

RADICACIÓN 19

PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN 21
SIMPLIFICACIÓN DE RADICALES 21
EXTRACCIÓN DE FACTORES 21
OPERACIONES CON RADICALES 21

RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES 23

ACTIVIDADES 24

MODULO 2: RELACIONES Y FUNCIONES 28

1. PRODUCTO CARTESIANO. RELACIONES Y FUNCIONES 29

PAR ORDENADO 29

PRODUCTO CARTESIANO 29

RELACIONES 30

RELACIÓN INVERSA 32

FUNCIÓN 32

2. FUNCIÓN DE PRIMER GRADO. ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA. 32

FUNCIÓN DE PRIMER GRADO 32

CÁLCULO DE LA PENDIENTE 34

CASOS ESPECIALES: 34

ECUACIÓN DE LA RECTA DADO UN PUNTO Y LA PENDIENTE 35

RECTAS PARALELAS 35

RECTAS PERPENDICULARES 36

ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA 36

ECUACIONES EQUIVALENTES 37

3. SISTEMAS DE DOS ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS 37

SISTEMAS DE DOS ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS 37

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA 38

A) MÉTODO DE SUSTITUCIÓN 39

B) MÉTODO DE IGUALACIÓN 40

C) MÉTODO DE REDUCCIÓN POR SUMAS O RESTAS. 41

D) MÉTODO DE DETERMINANTES O DE CRAMMER 41

E) MÉTODO GRÁFICO 43

4. FUNCIÓN DE SEGUNDO GRADO. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA. 44

FUNCIÓN CUADRÁTICA 44

¿CÓMO GRAFICAR UNA PARÁBOLA? 45

PROPIEDADES DE LAS RAÍCES 50

ACTIVIDADES 53

MODULO 3: EXPRESIONES ALGEBRAICAS 58

1. EXPRESIONES ALGEBRAICAS 59

CLASIFICACIÓN DE LAS EXPRESIONES ALGEBRAICAS 59

POLINOMIO 60

2. POLINOMIO EN UNA VARIABLE 60

POLINOMIOS ESPECIALES 61

Polinomio nulo *61*

Polinomio opuesto *61*

Polinomio constante *61*

IGUALDAD DE POLINOMIOS 62

POLINOMIOS COMPLETOS Y ORDENADOS: 62

VALOR NUMÉRICO 62

3. OPERACIONES CON POLINOMIOS 62

ADICIÓN DE POLINOMIOS 62

DIFERENCIA DE POLINOMIOS 63

PRODUCTO DE POLINOMIOS 64

DIVISIÓN DE POLINOMIOS: 65

REGLA DE RUFFINI 65

TEOREMA DEL RESTO 66

4. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS 67

CASOS DE FACTOREO 67

ACTIVIDADES 71

MODULO 4: TRIGONOMETRÍA PLANA 76

1. ÁNGULO. SISTEMAS DE MEDICIÓN 77

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS 78

Módulo 1

CONJUNTOS NUMÉRICOS

"Uno aprende haciendo las cosas, porque aunque piense que lo sabe, no tendrá la certidumbre hasta que lo intente"

SÓFOCLES

INTRODUCCIÓN

A lo largo de la historia de la matemática, la introducción y aceptación de cada concepto matemático nuevo ha requerido por regla general, un periodo muy largo de adaptación. Ello es especialmente visible en las distintas acepciones del concepto de número. Este concepto surgió como consecuencia de la necesidad práctica de contar objetos.

El primer conjunto creado es el de los números naturales, que, era obviamente limitado. Pero la conciencia sobre la necesidad de ampliar el conjunto de números representó una importante etapa en el camino hacia la matemática moderna.

Paralelamente a la ampliación de los números se desarrolló su simbología y los sistemas de numeración, diferentes para cada civilización.

OBJETIVOS

- Identificar y resolver situaciones problemáticas en los distintos conjuntos numéricos, utilizando las definiciones y propiedades de las diferentes operaciones.
- Expresar y operar en notación científica.
- Operar con radicales aplicando definiciones y propiedades.
- Aplicar la definición y las propiedades de los logaritmos.
- Presentar y graficar intervalos en *R*.

CONTENIDOS

1. Números naturales.
2. Números enteros.
3. Números racionales.
4. Números irracionales.
5. Números Reales.

1. Números Naturales

Los números naturales surgen por la necesidad que el hombre tiene de contar.

1, 2, 3, 4,... reciben el nombre de **números naturales** y al conjunto de estos números se lo simboliza con N . Entonces:

$$N = \{1,2,3,\ldots,n,n+1,\ldots\}$$

Si a N se le incorpora el cero, recibe el nombre de **conjunto de números naturales ampliado** y se simboliza: $N_0 = \{0,1,2,3,\ldots,n,n+1,\ldots\}$ Es decir $N_0 = N \cup \{0\}$

2. Números Enteros

Para que la resta sea siempre posible se crea el conjunto de los números negativos.

El conjunto formado por los números naturales o enteros positivos, el cero y los enteros negativos se denomina **conjunto de números enteros** y se designa con Z, que es una ampliación de los números naturales.

Es decir:

$$Z = N \cup \{0\} \cup \{\ldots,-3,-2,-1\} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,\ldots\} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$$

Un número entero queda definido por un número natural y un signo.

Por ejemplo:

$$+5 \quad ; \quad -5$$

El número natural se llama **valor absoluto** del número entero.

$+5$ y -5 tienen el mismo valor absoluto y distinto signo

Los representamos así:

$|+5| = 5$ se lee “valor absoluto” de $+5$ es igual a 5.

$|-5| = 5$ se lee “valor absoluto” de -5 es igual a 5

Dos números del mismo valor absoluto y distinto signo se dicen **opuestos**.

OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS

El conjunto de los números enteros es **cerrado** con respecto a las operaciones adición, multiplicación y sustracción.

Adición

Si los números tienen el **mismo signo** (son los dos positivos o los dos negativos), sumamos sus valores absolutos y a la suma le colocamos el signo que tienen los sumandos

Ejemplos:

$$-4-6=-10 \qquad +4+6=+10$$

Si dos sumandos tienen distinto signo, al de mayor valor absoluto le restamos el de menor valor absoluto, y al resultado, le colocamos el signo que tiene el sumando de mayor valor absoluto.

Ejemplos:

$$-6+2=-4 \qquad +6-2=+4$$

Diferencia

Restar *a-b*, no es otra cosa que sumarle al entero *a* el opuesto del entero *b*, es decir, calcular la suma *a+(-b)*.

Ejemplos:

$$5-2=5+(-2)=3 \qquad -2-(-5)=-2+5=3$$

$$2-5=2+(-5)=-3 \qquad -5-(-2)=-5+2=-3$$

Producto

Al multiplicar **dos factores de igual signo** (los dos positivos o los dos negativos) el resultado es positivo e igual al producto de sus valores absolutos.

Ejemplos:

$$(+5).(+6)=+30 \quad , \quad (-5).(-6)=+30$$

Si los dos factores tienen **distinto signo** (uno es positivo y el otro negativo), el resultado de su multiplicación es negativo con valor absoluto igual al producto de los valores absolutos de los factores.

Ejemplos:

$$(-5).(+6)=-30 \quad , \quad (+5).(-6)=-30$$

Se puede considerar en esta operación la regla de los signos:

REGLA DE LOS SIGNOS

$+ \ . \ + \ = \ +$
$+ \ . \ - \ = \ -$
$- \ . \ + \ = \ -$
$- \ . \ - \ = \ +$

En el caso que haya un producto de varios factores, se coloca el signo de acuerdo a la regla de los signos y se multiplican los valores absolutos de los números dados.

$$(-5)(+3)(+2)(-2)(-5)(-4) = +1200$$

Cociente

Para dividir números enteros, dividimos sus valores absolutos y al cociente le colocamos el signo que le corresponde, según la "regla de los signos".

La "regla de los signos" es análoga a la del producto.

Ejemplos:

$$(+30):(+6) = +5 \quad , \quad (-30):(-6) = +5$$

$$(-30):(+6) = -5 \quad , \quad (+30):(-6) = -5$$

3. Números Racionales

Un número racional se puede definir como el cociente entre dos números enteros a y b con $b \neq 0$.

Este cociente se indica $a:b$ o como fracción:

$$\frac{a}{b} \begin{array}{l} \rightarrow \text{numerador} \\ \rightarrow \text{denominado r} \end{array}$$

Al conjunto de estos números lo representamos con Q.

Observaciones:

1- Todo número entero "a" es un número racional con denominador igual a 1.

Ejemplos:

a) $5 = \frac{5}{1}$ b) $-11 = -\frac{11}{1}$

2- Todo número racional en el cual el numerador es múltiplo del denominador es un número entero.

Ejemplos:

a) $\frac{14}{2} = 7$ b) $-\frac{25}{5} = -5$

3- No todo número racional es un número entero.

Ejemplos:

$$\frac{3}{2} \in Q \quad \text{y} \quad \frac{3}{2} \notin Z$$

Estos números se llaman **fraccionarios puros**, y se los denota con F. Es decir, los números fraccionaros puros son aquellos que pueden escribirse como el cociente de dos números enteros distintos de cero, tal que el dividendo no sea múltiplo del divisor.

De las observaciones **1-, 2-** y **3-** concluimos que el conjunto de los **números racionales** Q es el conjunto formado por los **números enteros** y los **números fraccionarios puros**, es decir:

$$Q = Z \cup F$$

4- A los **números racionales** se los suele expresar **como números decimales** o **expresiones decimales, exactas** o **periódicas**.

Ejemplos:

a) $\frac{9}{10} = 0{,}9$ b) $\frac{4}{3} = 1{,}33\ldots = 1{,}\widehat{3}$ c) $\frac{1}{6} = 0{,}1666\ldots = 0{,}1\widehat{6}$

La expresión a) es una **expresión exacta** porque tiene una cantidad finita de cifras decimales.

Las expresiones b) y c) son **periódicas** porque los números 3 y 6 se repiten indefinidamente. A los números que se repiten indefinidamente se los llama período y se los señala con un arquito.

Las **expresiones periódicas** a su vez se clasifican en **puras** y **mixtas**.

Expresiones periódicas puras: en éstas el período aparece inmediatamente después de la coma como en la expresión b).

En las **expresiones periódicas mixtas**, hay una parte no periódica después de la coma y luego aparece el período, como en la expresión c).

Si un número racional está expresado como una fracción se puede hallar su expresión decimal dividiendo el numerador por el denominador de la fracción.

i) Todo número racional de **expresión decimal exacta** puede escribirse como **fracción decimal**, es decir como fracción cuyo denominador es un 1 seguido de tantos ceros como cifras decimales tenga el número.

Ejemplos:

$$2{,}8 = \frac{28}{10} = \frac{14}{5} \qquad , \qquad 5{,}46 = \frac{546}{100} = \frac{273}{50}$$

ii) Para escribir las **expresiones decimales periódicas** como **fracción** debemos distinguir entre **parte entera**, **parte periódica** y **parte no periódica**, como se muestra en el siguiente ejemplo.

Expresión periódica pura

$5{,}\widehat{2}$

parte entera | parte periódica

Expresión periódica mixta

$3{,}2\widehat{4}$

parte entera | parte no periódica | parte periódica

Expresión periódica pura

Para obtener una fracción equivalente a un decimal **periódico puro**, escribimos como numerador el número dado, sin coma, menos la parte entera y como denominador, tantos nueves como cifras decimales tenga el período. En el ejemplo anterior, es:

$$5{,}\widehat{2} = \frac{52-5}{9} = \frac{47}{9}$$

Expresión periódica mixta

Para obtener una fracción equivalente a un decimal **periódico mixto**, escribimos como numerador el número dado, sin coma, menos la parte entera seguida de la parte no periódica y, como denominador, tantos nueves como cifras decimales tenga el período, seguido de tantos ceros como cifras tenga la parte no periódica. En el ejemplo anterior, es:

$$3{,}2\widehat{4} = \frac{324-32}{90} = \frac{292}{90} = \frac{146}{45}$$

OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

Con los números racionales se pueden realizar las operaciones de adición, producto, diferencia y división. Es decir que el conjunto Q **es cerrado** respecto de dichas operaciones.

Fracciones equivalentes

Dos fracciones son equivalentes si las dividimos y obtenemos el mismo número.

Ejemplo: $\frac{8}{4}$ y $\frac{10}{5}$

Otra forma de definirlas es la siguiente: dos fracciones son equivalentes sí y solo sí el producto del numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda es igual al producto del denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda.

En algunos casos basta con ver que numeradores y denominadores son proporcionales, ya que

"si en una fracción multiplicamos o dividimos numerador y denominador por un mismo número, obtenemos una fracción equivalente".

Ejemplo:

$\frac{2}{3}$ y $\frac{8}{12}$ son fracciones equivalentes pues $2.12=24$ y $3.8=24$ o también porque $\frac{2.4}{3.4}=\frac{8}{12}$.

Lo que acabamos de presentar se utiliza para simplificar fracciones. Así, se divide numerador y denominador por un divisor común, hasta obtener lo que se llama una **fracción irreducible** es decir, que no se puede simplificar más.

Suma y diferencia de fracciones

Si las fracciones tienen **igual denominador**, simplemente sumamos o restamos los numeradores, según corresponda, y se escribe el mismo denominador.

Ejemplos:

a) $\frac{3}{5}+\frac{9}{5}=\frac{12}{5}$

b) $\frac{3}{5}-\frac{9}{5}=\frac{-6}{5}$

Si las fracciones tienen **distinto denominador**, podemos reemplazarlas por otras fracciones equivalentes con igual denominador

Ejemplos:

Sea $\frac{3}{5}+\frac{2}{7}$

Como $\frac{3}{5}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 7}$ y $\frac{2}{7}=\frac{2\cdot 5}{7\cdot 5}$

Entonces

$$\frac{3}{5}+\frac{2}{7}=\frac{3\cdot 7}{5\cdot 7}+\frac{2\cdot 5}{7\cdot 5}=\frac{3\cdot 7+2\cdot 5}{7\cdot 5}=\frac{21+10}{35}=\frac{31}{35}$$

Con símbolos, lo anterior se escribe como:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}+\frac{bc}{bd}=\frac{ad+bc}{bd}$$

Para la diferencia es

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad}{bd}-\frac{bc}{bd}=\frac{ad-bc}{bd}$$

Producto de fracciones

El producto de dos números fraccionarios es otro número fraccionario cuyo numerador es el producto de los numeradores y cuyo denominador es el producto de los denominadores

En símbolos:

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}, \qquad b \text{ y } d \text{ son distintos de cero}$$

Ejemplos:

a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$ b) $2\cdot\frac{5}{4}=\frac{2}{1}\cdot\frac{5}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$ c) $\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot 6=\frac{120}{12}=10$

División de fracciones

Para dividir fracciones hacemos:

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc} \qquad b,c \text{ y } d \text{ son distintos de cero}$$

Ejemplos:

$$\frac{2}{5}:\frac{6}{7}=\frac{2}{5}\cdot\frac{7}{6}=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}$$

4. Números irracionales

El conjunto de los **números racionales** es un **conjunto denso** pues entre dos racionales cualquiera, existen infinitos racionales. Sin embargo, los números racionales no abarcan la totalidad de los números ni son suficientes para la resolución de ciertos problemas de aritmética. Existen números que no pueden representarse como el cociente $\frac{a}{b}$ con a y $b \in Z$ y $b \neq 0$, o sea, no son racionales. Estos números se pueden escribir como una **expresión decimal de infinitas cifras no periódicas** y se llaman **números irracionales**. El conjunto de los números irracionales se designa con I.

Los números irracionales generalmente provienen de raíces que en Q no son exactas

(Ejemplos: $\sqrt{2}, \sqrt{3}$).

Existen otros números irracionales como π y e que no provienen de raíces.

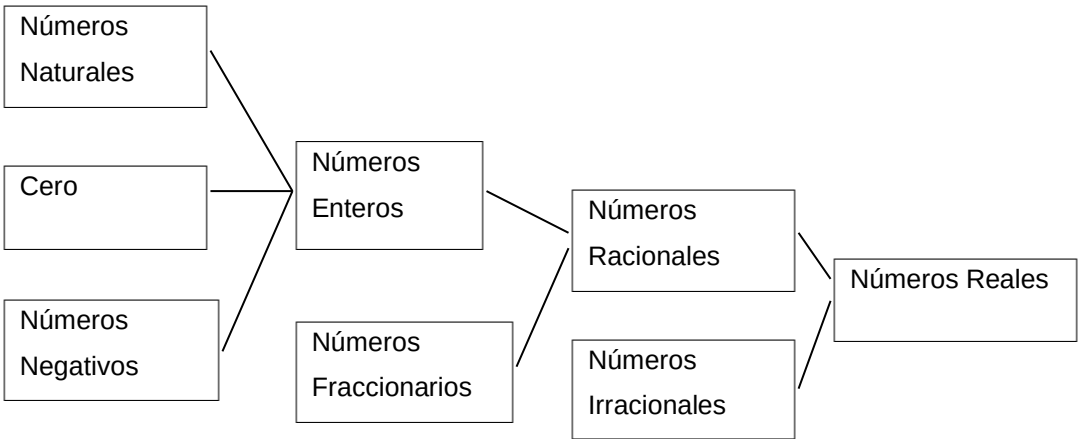
5. Números Reales

Con R se designa el conjunto de **números reales**. Éstos se pueden considerar como la unión de los **números racionales** con los **números irracionales**. Entonces

$$R = Q \cup I$$

El conjunto R es **denso**, y además es **continuo**.

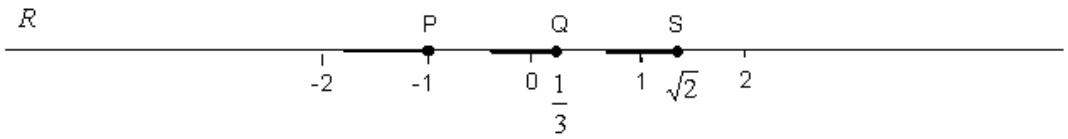
Sintetizando:



Representación geométrica de los números reales

Dada una recta *R,* se elige en ella un punto origen al que se le hace corresponder el número cero y una unidad de medida. Se establece una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números reales y el conjunto de los puntos de la recta *R*, es decir:
"A todo número real le corresponde un punto en la recta y a todo punto de la recta le corresponde un número real".

De esta manera, por ejemplo, los números $-1,\ \frac{1}{3},\ \sqrt{2}$ quedan representados por los puntos P, Q y S respectivamente, como se muestra en el siguiente gráfico:



Operaciones con números reales

En R se definen básicamente dos operaciones: la adición y el producto.

Propiedades de las operaciones de adición y producto

1. **Propiedad asociativa de la adición**: $(a+b)+c = a+(b+c)$.

2. **Propiedad asociativa de la multiplicación:** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

3. **Propiedad conmutativa de la adición:** $a + b = b + a$ **.**

4. **Propiedad conmutativa de la multiplicación:** $a \cdot b = b \cdot a$ **.**

5. **Propiedad del neutro aditivo:** Existe un único número 0 tal que $a + 0 = 0 + a = a$

6. **Propiedad del neutro multiplicativo:** Existe un único número 1 tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

7. **Propiedad del opuesto aditivo:** Para todo número real *a* existe un único número real, **-a**, tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$

8. **Propiedad del inverso multiplicativo:** Para todo número real *a* distinto de cero, existe un único número real $\frac{1}{a}$ tal que $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

9. **Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición**

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad (b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

Orden de las operaciones

Para el uso de los símbolos de agrupación y de las cuatro operaciones aritméticas, se conviene el siguiente orden:

1. **Símbolos de agrupamiento**: Paréntesis **( )**, corchetes **[ ]**, llaves **{ }** y **rayas fraccionarias** pueden tomarse como símbolos de agrupamiento. En cualquier expresión, se debe realizar primero las operaciones en los paréntesis, corchetes o llaves más internos y seguir de esta manera hacia afuera, hasta que hayan sido removidos todos los paréntesis, corchetes y llaves. En el caso de las rayas de fracción realice las operaciones del numerador y denominador por separado.

2. **Operaciones aritméticas**: Si no se presentan símbolos de agrupamiento, se realizarán primero las multiplicaciones y divisiones, en el orden en que estas aparezcan, seguidas por cualquier adición y sustracción restante, también en el orden que aparezcan.

Ejemplo 1:

Considere la expresión $5 \cdot 10 + 2$. En virtud de la convención en el orden de las operaciones, la multiplicación se hace primero, seguida por la adición:

$$5 \cdot 10 + 2 = 50 + 2 = 52$$

Por otro lado, considere la expresión $5 \cdot (10 + 2)$. Aquí, los paréntesis indican que la adición debe hacerse primero, seguida por la multiplicación.

Entonces, $5 \cdot (10 + 2) = 5 \cdot 12 = 60$

Claramente, $5 \cdot 10 + 2 \neq 5 \cdot (10 + 2)$.

Ejemplo 2:

$$[(-6+12):6]\cdot(-1)\cdot\{[(-21-3)\cdot 8]\cdot(-10)\}:(-6)=$$
$$=[6:6].(-1).\{[-24.8].(-10)\}:(-6)=$$
$$=(-1).\{-192.(-10)\}:(-6)=$$
$$=(-1).1920:(-6)=$$
$$=(-1920):(-6)=320$$

Ejemplo 3:

$$\frac{5}{\frac{3}{2}+\frac{2}{3}}+\frac{1-\frac{5}{4}}{\frac{7}{2}.\frac{3}{14}}=\frac{5}{\frac{13}{6}}+\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}}=\frac{30}{13}+\left(-\frac{1}{3}\right)=\frac{77}{39}$$

POTENCIACIÓN

Definición de potencia de exponente natural

Una **potencia** es un símbolo que expresa una multiplicación en la que todos los factores son iguales.

Por ejemplo considere el producto 3.3.3.3, este producto puede escribirse en **forma exponencial** como 3^4, a 3 se le llama **base** y a 4 **exponente.**

En general, para cualquier número real a y cualquier $n \in N$, el símbolo a^n representa el producto de n factores, cada uno de ellos igual a a.

$$\underbrace{a.a.a..a.a}_{n\text{ factores}} = \underbrace{a}_{base}{}^{n\rightarrow\text{exponente}}$$

El símbolo a^n se lee: "la *n*-ésima potencia de a", "a (elevada) a la *n*-ésima potencia" o simplemente "a a la n".

Si el exponente n es 1, usualmente se omite, así a^1 se escribe: a.

Ejemplos:

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}.\frac{3}{2} = \frac{9}{4}$

b) $(-5)^2 = (-5).(-5) = +25$

c) $2^3 = 2.2.2 = 8$

d) $\left(-\frac{1}{4}\right)^3 = \left(-\frac{1}{4}\right).\left(-\frac{1}{4}\right).\left(-\frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{64}$

De la definición y de los ejemplos presentados, observamos que:

i) Si el exponente es par y la base de la potencia es positiva o negativa entonces el resultado conserva es positivo.

ii) Si el exponente es impar y la base de la potencia es positiva o negativa entonces el resultado conserva el signo de la base.

Potencia de exponente entero

Extenderemos todas las consideraciones anteriores para el caso en que el exponente sea cero o entero negativo. Esta extensión debe preservar la propiedad.

Vimos que $a^m.a^n = a^{m+n}$.

- Si suponemos que la propiedad anterior es cierta cuando *m* o *n* es cero, entonces es correcto escribir:

$$a^0.a^n = a^{0+n}$$

Puesto que el miembro de la derecha: a^{0+n} puede escribirse simplemente como a^n, tenemos

$$a^0.a^n = a^n$$

al multiplicar por a^0 no cambia el valor de a^n. Así que a^0 debe ser igual a 1. Luego

$$a^0 = 1, \quad si\ a \neq 0$$

Requerimos que $a \neq 0$ para evitar la **expresión indefinida** 0^0**.**

Es decir, **toda potencia de exponente cero y base distinta de cero es igual a uno**.

- Si suponemos que $m = -n$, entonces

$$a^{-n}.a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$$

Puesto que el producto a^{-n} y a^n es uno, estos números deben ser recíprocos uno del otro.

Por lo tanto tenemos

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad , \quad a \neq 0$$

Requerimos que $a \neq 0$ para evitar la **expresión indefinida** $\frac{1}{0}$.

Es decir, **toda potencia de exponente negativo se puede escribir como potencia de exponente positivo, invirtiendo la base de la potencia dada.**

Cuando en una fracción aparecen potencias, éstas se pueden colocar en el numerador o en el denominador cambiando el signo del exponente.

Ejemplos:

a) $\frac{3^4}{3^{-2}} = 3^4.3^2 = 3^6$

b) $\frac{5^{-2}.5^4}{5^1.5^{-3}} = \frac{5^3.5^4}{5^1.5^2} = \frac{5^7}{5^3} = 5^4$

Potencia de exponente racional

Se amplía la definición de potencia para el caso de exponente racional.

Para cualquier número real no negativo y para m y n enteros positivos se cumple:

i) $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

ii) $a^{-\frac{n}{m}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}$ si $a \neq 0$

En el caso que el radicando sea negativo, solo existe $a^{\frac{n}{m}}$ si m es impar.

Ejemplos:

a) $0{,}125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{0{,}125} = 0{,}5$

b) $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 2^3 = 8$

c) $4^{0,25} = 4^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}$

d) $(-64)^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\sqrt[3]{(-64)^2}} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{-64}\right)^2} = \frac{1}{(-4)^2} = \frac{1}{16}$

Propiedades de la potenciación

1. **Producto de potencias de igual base**: El producto de potencia de igual base es otra potencia cuya base es la misma y cuyo exponente es la suma de los exponentes dados. Es decir, si $a \in R$ y $m, n \in R$, entonces:

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

Recíprocamente, si $a \in R$ y $m,n \in R$: $a^{m+n} = a^m.a^n$

Ejemplo: $5^3.5^4 = 5^{3+4} = 5^7$

2. Cociente de potencias de igual base: El cociente de potencias de igual base (no nula) es otra potencia cuya base es la misma y cuyo exponente es la diferencia de los exponentes dados. Es decir, si $a \in R; a \neq 0;\ m,n \in R,\ m > n$ entonces:

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

Recíprocamente, si $a \in R;\ a \neq 0$ y $m,n \in R, m > n$: $a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$

Ejemplo:

$$\frac{2^8}{2^5} = 2^{8-5} = 2^3$$

3. Potencia de potencia: La potencia de potencia es otra potencia cuya base es la misma y cuyo exponente es el producto de los exponentes dados. Es decir, si $a \in R$ y $m,n \in R$, entonces

$$\boxed{\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}}$$

Recíprocamente, si $a \in R;\ y\ \ m,n \in R$: $a^{m.n} = \left(a^m\right)^n$

Ejemplo: $\left(2^3\right)^4 = 2^{3.4} = 2^{12}$

4. La potencia de un producto: la potencia de un producto es igual al producto de las potencias de cada uno de los factores. Es decir, si $a,b \in R; n \in N$, entonces

$$\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$$

Recíprocamente, si $a,b \in R$ y $n \in R$: $a^n.b^n = (a.b)^n$

5. La potencia de un cociente: La potencia de un cociente (con denominador no nulo) es igual a la potencia del numerador dividida por la potencia del denominador. Es decir, si $a,b \in R; b \neq 0; n \in N,$ entonces

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

Recíprocamente, si $a,b \in R \;\; ; b \neq 0$ y $n \in R$: $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$

Nota: La potenciación **no es distributiva** respecto a la **suma** y a la **resta**. $(a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n$

NOTACIÓN CIENTÍFICA

Usamos la notación científica para expresar números muy grandes o muy pequeños, lo cual nos permite captar el tamaño de un número.

Para escribir un número en notación científica, lo expresamos como el producto de una potencia de 10 por un número que tiene un valor absoluto mayor o igual que 1 y menor que 10, es decir:

$$c.10^n$$

en donde *n* es un entero y *c* un número real tal que $1 \leq c < 10$.

Ejemplos*:*

a) La luz recorre aproximadamente 300000 km. por segundo. En notación científica lo expresamos así: 3. 10^5 km por segundo.

b) En un año recorre aproximadamente 9460000000000 km o 9,46.10^{12} km; a esta distancia la llamamos año luz.

c) Los átomos tienen un núcleo con electrones que giran a su alrededor. En el núcleo de los átomos existen protones y neutrones.

Los protones y los neutrones tienen cerca de 0,000000000000001 m de ancho y una masa de aproximadamente 0,00000000000000000000000000017 kg.

En notación científica, estas dos medidas las escribimos así: 10^{-15} m y 1,7. 10^{-27} kg.

Por lo tanto cuando un número se multiplica por una potencia de 10 de exponente positivo se mueve la coma hacia la derecha tantos lugares como indique el exponente.

Si por el contrario el exponente de la potencia de 10 es negativo, se mueve la coma hacia la izquierda.

RADICACIÓN

Dado un número real a y un entero positivo n, se llama raíz *n*-ésima de a a otro número real b tal que b elevado a n es igual a a. Es decir,

$$\forall a,b \in R, \;\; \forall n \in N; \;\; \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

En $\sqrt[n]{a}$, *n* es el índice, *a* es el radicando y $\sqrt{\ }$ es el signo radical.

Cuando el índice *n* es **par**, un número positivo *a* tendrá dos raíces *n*-ésimas reales, una positiva y otra negativa. La raíz positiva es llamada **raíz principal** o **raíz aritmética**. Por ejemplo, puesto que $5^2 = 25$ y $(-5)^2 = 25$. Pero 5, que es la raíz positiva, es llamada raíz principal de 25. Así, cuando *n* es par, el símbolo $\sqrt[n]{\ }$ denota la raíz *n*-ésima principal (positiva).

Cuando el índice *n* es **impar**, un número real tiene únicamente una raíz *n*-ésima real. Por ejemplo $\sqrt[3]{-1000} = -10$ porque –10 es el (único) número real ya que $(-10)^3 = -1000$ elevado a la tercera potencia es –1000.

Número y naturaleza de las raíces n-ésimas reales de b

Para	$b>0$	$b<0$	$b=0$
n par	Una raíz positiva y Una raíz negativa	Ninguna raíz real	Una raíz real, igual 0
n impar	Una raíz positiva	Una raíz negativa	Una raíz real, igual 0

$\sqrt[n]{b}$, se llama radical y se lee, "la raíz *n*-ésima principal de b" o, simplemente, "la raíz *n*-ésima de b" y designa:

1. La raíz *n*-ésima no negativa de b si n es par y $b \geq 0$. En este caso $-\sqrt[n]{b}$ representa la raíz *n*-ésima negativa de b, si $b \neq 0$.

   Ejemplos: $\sqrt{36} = 6, \quad -\sqrt[4]{81} = -3, \quad \sqrt[4]{0} = 0$

2. La raíz *n*-ésima real única de b si n es impar.

   Ejemplos: $\sqrt[3]{-125} = -5, \quad \sqrt[5]{32} = 2$

   Si *n* es par y $b<0$, no se le asigna ningún significado al símbolo $\sqrt[n]{b}$ en el sistema de los números reales. Por ejemplo, $\sqrt[6]{-64}$ no está definida en el sistema de los números reales.

   Nota: cuando $\sqrt[n]{b}$ es un número real, su definición implica que $\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b$. ¿Podemos simplificar

$\sqrt[n]{b^n}$? Si n es un entero positivo impar, $\sqrt[n]{b^n} = b$; por ejemplo, $\sqrt[3]{2^3} = 2$ y $\sqrt[3]{(-4)^3} = -4$. Pero, si n es un entero positivo par, $\sqrt[n]{b^n} = |b|$, porque los radicales con índice par designan números no negativos; por ejemplo $\sqrt[4]{2^4} = 2$ y $\sqrt[4]{(-2)^4} = |-2| = 2$.

Propiedades de la radicación

$\forall a, b \in R$; $\forall m,n \in$ N y con la condición de que si m y n son números pares entonces $a \geq 0$ y $b \geq 0$, valen las siguientes propiedades:

1) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

2) $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$

3) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$, $p \in N$

4) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}}$, $p \in N$, $p \neq 0$

5) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

La propiedad 3) se utiliza para reducir radicales a **mínimo común índice**, y la 4) para **simplificar radicales**.

$$\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$$

Simplificación de radicales

Se aplica la propiedad 4)

Ejemplo: $\sqrt[6]{a^3} = \sqrt{a}$; se dividió índice y exponente por 3 $(a > 0)$

Extracción de factores

Se extraen aquellos factores cuyo exponente es mayor o igual que el índice, siendo el exponente fuera del radical, el cociente entero de dividir su exponente por el índice y dentro del radical queda el factor con un exponente igual al resto de ese cociente.

Ejemplo:

$$\sqrt[3]{a^6 b c^5} = a^2 c \sqrt[3]{b c^2}$$

Operaciones con radicales

Estudiaremos las operaciones básicas: suma, resta, multiplicación y división de radicales.

Radicales semejantes: son aquellos radicales que tienen el mismo índice e igual radicando, pudiendo tener diferentes los coeficientes.

Ejemplos:

$$3\sqrt[3]{2} \quad , \quad \tfrac{1}{2}\sqrt[3]{2}$$

Suma algebraica de radicales semejantes: La suma algebraica de radicales semejantes es otro radical semejante a los dados cuyo coeficiente es la suma algebraica de los coeficientes de los mismos.

Ejemplos:

a) $2\sqrt{x}+6\sqrt{x}+3\sqrt{x}=(2+6+3)\sqrt{x}=11\sqrt{x}$

b) $\frac{3}{4}\sqrt{5}-\frac{1}{2}\sqrt{5}=\left(\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\right)\sqrt{5}=\frac{1}{4}\sqrt{5}$

c) $\frac{1}{2}\sqrt{12}+\sqrt{75}=\frac{1}{2}\sqrt{2^2\cdot 3}+\sqrt{5^2\cdot 3}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}+5\sqrt{3}=6\sqrt{3}$

d) $\sqrt{8}-\frac{3}{4}\sqrt{2}+3\sqrt{18}=\sqrt{2^3}-\frac{3}{4}\sqrt{2}+3\sqrt{2.3^2}=2\sqrt{2}-\frac{3}{4}\sqrt{2}+3.3\sqrt{2}=$

$$=2\sqrt{2}-\frac{3}{4}\sqrt{2}+9\sqrt{2}=\left(2-\frac{3}{4}+9\right)\sqrt{2}=\frac{41}{4}\sqrt{2}$$

Multiplicación de radicales: La multiplicación de radicales de igual índice es otro radical del mismo índice que el de los factores, cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes de los radicales dados y cuyo radicando, el producto de los radicandos. Si son de índice diferente, se reducen a índice común.

Ejemplos:

De igual índice:

a) $2\cdot\sqrt{8}\cdot 5\sqrt{2}=10\sqrt{16}=40$

b) $\left(\sqrt{5}-2\right)\left(3+\sqrt{5}\right)=3\sqrt{5}+5-6-2\sqrt{5}=\sqrt{5}-1$

De distinto índice:

c) $\sqrt[3]{2a^2}\cdot 5\sqrt{a}=\sqrt[6]{2^2a^4}\cdot 5\sqrt[6]{a^3}=5\sqrt[6]{4a^7}=5a\sqrt[6]{4a}$

División de radicales: La división de radicales de igual índice, es otro radical del mismo índice, cuyo coeficiente es el cociente del coeficiente del dividendo por el divisor, y cuyo radicando es el cociente de los radicandos. Si tienen distinto índice se reducen previamente a índice común.

Ejemplos:

De igual índice: $2\sqrt{8} : 5\sqrt{2} = \frac{2}{5}\sqrt{8:2} = \frac{2}{5}\sqrt{4} = \frac{4}{5}$

De distinto índice: $\sqrt[3]{2a^2} : 5\sqrt{a} = \sqrt[6]{2^4 a^4} : 5\sqrt[6]{a^3} = \frac{1}{5}\sqrt[6]{2^2 a} = \frac{1}{5}\sqrt[6]{2^2 a} = \frac{1}{5}\sqrt[6]{4a}$

RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES

Consiste en eliminar las raíces que puedan aparecer en el denominador. Se presentan las siguientes situaciones:

- **Que el denominador sea una raíz cuadrada**: en este caso se multiplica numerador y denominador por la misma raíz.

  Ejemplo: $\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

- **Que el denominador no sea una raíz cuadrada:** en este caso se multiplica numerador y denominador por una raíz del mismo índice que la del denominador, pero con un radicando elevado a un exponente que sea la diferencia entre el índice y el exponente.

  Ejemplo: $\frac{5}{\sqrt[3]{2}} = \frac{5\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{2^2}} = \frac{5\sqrt[3]{4}}{2}$

- **Que el denominador sea un binomio con raíces cuadradas**: en este caso se multiplica numerador y denominador por el **conjugado del denominador**.

  Ejemplo:

$$\frac{2}{5-\sqrt{3}} = \frac{2.(5+\sqrt{3})}{(5-\sqrt{3}).(5+\sqrt{3})} = \frac{10+2\sqrt{3}}{25-3} = \frac{10+2\sqrt{3}}{22} = \frac{10}{22} + \frac{2\sqrt{3}}{22} = \frac{5}{11} + \frac{\sqrt{3}}{11}$$

ACTIVIDADES

- **Actividad 1:** Clasificar los siguientes números en número racional *(Q)* o número irracional *(I)*. (Marcar con una X)

	–4	π	$-\sqrt{17}$	$0,9\hat{5}$	3,14	$\frac{6}{7}$
Q						
I						

- **Actividad 2:** Enunciar la propiedad de los números reales que justifique cada enunciado:

a) $2+3=3+2$ ……

b) $4+(2+3)=(4+2)+3$ ……

c) $6+0=6$ ……

d) $3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)=1$ ……

e) $3\cdot(4+5)=3\cdot4+3\cdot5$ ……

- **Actividad 3:** Evaluar las siguientes expresiones si $x=0,\hat{3}$, $y=0,5$ y $z=-8$.

a) $-(-z)$ b) $-[x+(-y)]$

c) $\dfrac{xz+x(-z)}{x-xy}$ d) $\{[(x+y)z]+x\}+yz$

- **Actividad 4:** Simplificar las expresiones, usando propiedades de la potenciación y la radicación.

a) $\dfrac{3^{-1}}{3^4}=$ b) $\dfrac{2^6\cdot2^{-1}}{2^3}=$ c) $\dfrac{2^0\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}}=$ d) $\dfrac{27^{-1}}{3^{-3}}=$

e) $\left(2^{10}\cdot5^3\right)^0=$ f) $2^4\cdot2^{-2}+2^2=$ g) $7^{-2}\cdot\dfrac{1}{7}=$ h) $\sqrt[3]{25}\sqrt[3]{5}=$

- **Actividad 5:** Determinar si las siguientes afirmaciones son Verdaderas o Falsas $(x>0, p\in Z, q\in Z)$:

a) $x^0=0$ b) $x^0=1$ c) $x^1=x$ d) $x^1=1$

e) $\sqrt[p]{x^q}=x^{p/q}$ f) $\left(x^p\right)^q=x^{pq}$ g) $x^p\cdot x^q=x^{p+q}$ h) $\dfrac{x^p}{x^q}=x^{p/q}$

i) $\frac{4^{a^2}}{4^{b^2}} = 4^{(a-b)(a+b)}$ j) $\sqrt{2+5} = \sqrt{2} + \sqrt{5}$ k) $\sqrt{2a} = \sqrt{2}\sqrt{a}$ l) $0^2 = 0$

- **Actividad 6:** Resolver las siguientes operaciones

a) $(21:3+2):3-[4\cdot(3-9)] =$

b) $-2+\frac{5}{3}:\frac{25}{9}-\frac{8}{3}+\frac{75}{12}.\frac{6}{25} =$

c) $\frac{7}{6}-\left(\frac{9}{10}+\frac{18}{21}:\frac{20}{14}\right)+\left(\frac{3}{5}-1\right).\frac{3}{2} =$

d) $\left(\frac{3}{5}-1\right):0,\hat{2}-0,4\cdot\left(\frac{3}{4}-1\right)+\frac{1}{5} =$

e) $\sqrt{\left(3^{-2}+0,\hat{6}\right):\frac{1}{7}}-\left(1,5-\frac{5}{6}\right)^2-2,\hat{3} =$

f) $\left(2^{-3}+3^{-2}\right)^{-1} =$

g) $\dfrac{1-\dfrac{1}{1-2^{-2}}}{1-\dfrac{1}{1-2^{-4}}} =$

- **Actividad 7:** Expresar los siguientes números en notación científica

a) 325000000 b) 0,022

c) 0,102 d) 0,0000085

e)0,0005 f) 10000000

g) 0,0000001 h) 648,16

l) 65.10^4 j) $0,18.10^{-2}$

- **Actividad 8:** Resolver los siguientes ejercicios usando notación científica.

a) 800000.40000 b) $0,000006:2000$

c) $\frac{55\cdot10^4\cdot0,0012}{0,000003}$ d) $\frac{0,00025\cdot37\cdot10^4}{740\cdot10^{-3}}$

- **Actividad 9:** Simplificar los siguientes radicales

a) $\sqrt[3]{27x^6b^9}$ b) $\sqrt[8]{\frac{64a^{14}}{c^8}}$

- **Actividad 10:** Extraer factores del signo radical

a) $\sqrt[3]{x^5y^3}$ b) $\sqrt[4]{\frac{48}{5}x^9y^5z^4}$

- **Actividad 11:** Indicar V o F. Justificar introduciendo factores

a) $\sqrt[3]{128ab^3} = 4b\sqrt[3]{2a}$ .....

b) $\sqrt{\frac{x^4y}{27}} = \frac{1}{3}x^3\sqrt{\frac{y}{3}}$ .....

c) $\sqrt[5]{\frac{64}{9}x^{10}z^2a^{23}} = 2x^2a^4\sqrt[5]{\frac{2}{9}z^2a^3}$ .....

d) $\sqrt[3]{a^4-b^4} = (a-b)\sqrt[3]{a-b}$ .....

- **Actividad 12:** Efectuar las siguientes operaciones

a) $\sqrt{18}+\sqrt{8}-\sqrt{6}$ b) $\sqrt[3]{a^4}+2\sqrt[6]{a^8}-\frac{1}{3}\sqrt[9]{a^{12}}$

c) $\sqrt{\sqrt{2^3}\sqrt{2}}$ d) $\sqrt{\frac{\sqrt{16}}{81}}-\sqrt{\frac{25}{\sqrt{81}}}$

- **Actividad 13:** Racionalizar denominadores, haciendo las salvedades correspondientes.

a) $\frac{3}{\sqrt{3}}$ b) $\frac{3}{\sqrt{8}}$

c) $\frac{a}{2\sqrt[3]{b^2}}$ d) $\frac{2\sqrt[3]{x^2}}{3\sqrt[5]{x^4}}$

e) $\frac{1}{2-\sqrt{3}}$ f) $\frac{2}{-1+\sqrt{5}}$

g) $\frac{1+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ h) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$

- **Actividad 14:** Realizar las siguientes operaciones (Sugerencia: escribir como potencias de exponente racional y resolver)

a) $\left[\sqrt[4]{2^{-1}} : \left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{\frac{4}{7}}$

b) $\left(\sqrt{\frac{1}{3}} : \sqrt[4]{\frac{1}{3}}\right)^{-2}$

c) $\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{2}} .5^{\frac{3}{2}} . \left(\frac{1}{5}\right)^{-\frac{1}{3}} : 5^{\frac{1}{2}}\right]^{-\frac{2}{3}}$

Módulo 2

RELACIONES Y FUNCIONES

"Esa flor del pensamiento matemático moderno:

el concepto de función"
THOMAS J. McCORMACK

INTRODUCCIÓN

Las funciones desempeñan en la actualidad un papel fundamental en las Aplicaciones de la Matemática a otras ciencias.
El término "función" (del latín *functio*, acto por realizar) lo utilizó por primera vez Gottfried Leibniz en 1694, referido a curvas. Un siglo más tarde, Leonhard Euler veía una función como una expresión formada con constantes y variables. Fue él quien puso de moda el símbolo $f(x)$, introducido por Alexis Clairaut en 1734. La definición hoy aceptada la incorporó Gustav Dirichlet a mediados del siglo XIX.

OBJETIVOS

- Definir y clasificar funciones.
- Identificar y graficar una función lineal considerando los casos particulares.
- Identificar y graficar una función de 2º grado teniendo en cuenta sus elementos.
- Resolver ecuaciones de 1º y 2º grado.
- Resolver sistemas de dos ecuaciones de 1º grado con dos incógnitas.
- Plantear y resolver situaciones problemáticas.

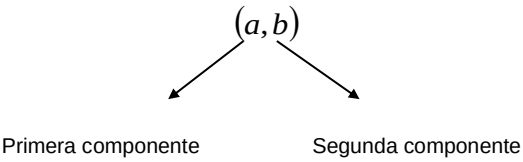
CONTENIDOS

1. Producto cartesiano, relaciones y funciones.
2. Función de primer grado.
3. Ecuaciones de primer grado con una incógnita.
4. Sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas.
5. Función de segundo grado.
6. Ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

1. Producto Cartesiano. Relaciones y funciones

Par ordenado

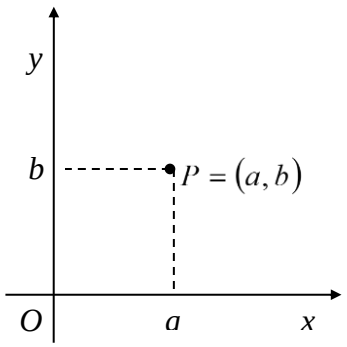
Se denomina par ordenado (a,b) a una lista de dos objetos, dados en un cierto orden, en donde a es un elemento de un conjunto A y b es un elemento de un conjunto B.



Por otra parte, dos pares ordenados son iguales si y solo si son iguales sus componentes respectivas. En símbolos:

$$(a,b)=(c,d) \quad \Leftrightarrow \quad a=c \wedge b=d$$

De igual modo a como se representan los números reales en la recta numérica, los pares ordenados pueden ser representados en el plano, mediante un sistema de ejes coordenados cartesianos. A cada par ordenado (a,b), le corresponde un punto *P* en el plano cartesiano tal que la primera componente del par es representada en el **eje** x (eje de las abscisas) y la segunda componente se representa en el **eje** y (eje de las ordenadas). Recíprocamente a cada punto *P* del plano le corresponde un par ordenado.



Producto cartesiano

Dados dos conjuntos A y B no vacíos, se define el producto cartesiano $A \times B$ como el conjunto de todos los pares ordenados cuya primera componente es un elemento de A y la segunda componente es un elemento de B.

$$A \times B = \{(a,b) / a \in A \ \wedge \ b \in B\}$$

Ejemplo:

Dados $A = \{1,2,3\}$ y $B = \{m,n\}$

$A \times B = \{(1,m),(1,n),(2,m),(2,n),(3,m),(3,n)\}$

$B \times A = \{(m,1),(m,2),(m,3),(n,1),(n,2),(n,3)\}$

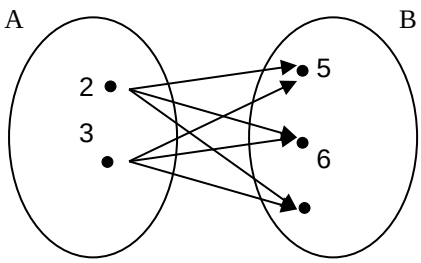
Se puede observar que $A \times B \neq B \times A$.

Consideremos ahora los conjuntos $A = \{2,3\}$ y $B = \{5,6,7\}$. El producto cartesiano $A \times B$ donde $A \times B = \{(2,5),(2,6),(2,7),(3,5),(3,6),(3,7)\}$ puede ser representado mediante:

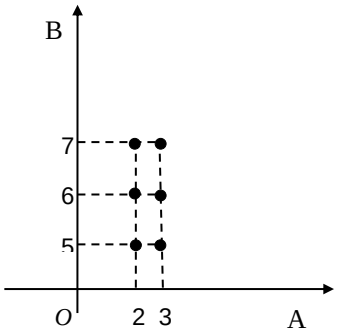
TABLAS

B / A	5	6	7
2	$(2,5)$	$(2,6)$	$(2,7)$
3	$(3,5)$	$(3,6)$	$(3,7)$

DIAGRAMAS DE VENN



SISTEMAS DE EJES CARTESIANOS



RELACIONES

Como ya se dijo, el producto cartesiano proporciona todas las posibles combinaciones que existen entre los elementos de dos conjuntos, sin embargo, de todas ellas sólo pueden llegar a interesar algunas.

Ejemplo:

Si $A=\{2,3\}$ y $B=\{5,6,7\}$

¿Cuáles son los pares ordenados que satisfacen: "…es divisor de …"?

$A\times B$ provee todas las posibles elecciones, pero sólo un subconjunto de ellas da la relación correcta.

Así:

Se llama **relación** de *A* en *B* a todo subconjunto R del producto cartesiano $A\times B$

$$\boxed{\mathrm{R}\subset \mathrm{A}\times \mathrm{B}}$$

- ✓ El conjunto A se llama **conjunto de partida** y el conjunto B se llama **conjunto de llegada** de la relación.
- ✓ Si $(a,b)\in \mathrm{R}$ se dice que a **está relacionado** con b ; o bien b **es imagen** de a por R , o que a es la **preimagen** de b por R .

Ejemplo:

Dados los conjuntos: $A=\{2,3\}$, $B=\{5,6,7\}$ y la relación R: "…es divisor de…", se tiene que

$$R=\{(2,6),(3,6)\}\subset A\times B$$

Dominio:

Se llama dominio, D(R), de una relación de A en B al subconjunto de A formado por las primeras componentes de los pares ordenados que pertenecen a la relación.

En el ejemplo dado precedentemente, se tiene que: $\mathrm{D(R)}=\{2,3\}$

Imagen:

Se llama imagen, I(R), de una relación de A en B al subconjunto de B formado por las segundas componentes de los pares ordenados que pertenecen a la relación.

En el ejemplo anterior, se tiene que: $\mathrm{I(R)}=\{6\}$

Relación Inversa

Sea una relación R de A en B, se denomina **relación inversa** R^{-1} de B en A, a la que resulta de invertir los pares ordenados que satisfacen la relación R.

En símbolos:

$$\mathrm{R}^{-1} = \{(b,a) \in B \times A \ / \ (a,b) \in \mathrm{R}\}$$

En el ejemplo tratado anteriormente, la relación inversa de R, está dada por:

$$\mathrm{R}^{-1} = \{(6,2),(6,3)\} \subset B \times A$$

y corresponde a la relación: "…es múltiplo de…"

FUNCIÓN

Las funciones son casos particulares de las relaciones. El concepto de **función** es esencial en la formulación matemática de las leyes de la naturaleza, estableciéndose una relación cuantitativa entre las diferentes variables que intervienen en el fenómeno.

Definición

Una función f de *A* en *B* $(f : A \to B)$ es una relación que cumple:

1. El dominio de f es A.
2. A cada elemento $x \in A$ le corresponde un **único** elemento $y \in B$ que se denota por $y = f(x)$.

A "x" se la llama **variable independiente** y a "y" **variable dependiente.**

Al igual que las relaciones, una función puede representarse mediante tablas, diagramas de Venn, en el plano cartesiano, mediante una fórmula o coloquialmente.

2. FUNCIÓN DE PRIMER GRADO. ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA.

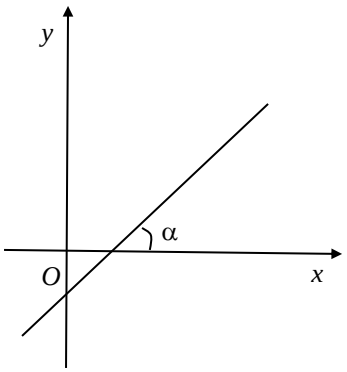
Función de primer grado

Toda función de primer grado en la variable x está dada por:

$$f(x) = mx + b$$

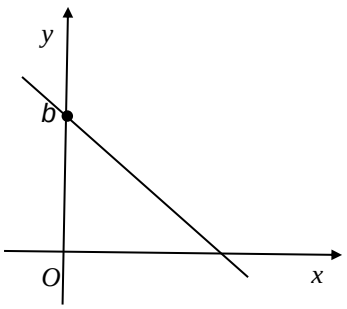
Las funciones de primer grado tienen las siguientes particularidades:

- Su presentación gráfica en el plano es una recta.
- El dominio es el conjunto de los números reales.
- La imagen es el conjunto de los números reales.
- La igualdad $y = mx + b$ se llama **ecuación explícita** de la recta.
- La constante m recibe el nombre de **pendiente** o **parámetro de dirección** y corresponde al valor de la tangente del ángulo α (medido en sentido antihorario) que la recta forma con la dirección positiva del eje x. *En símbolos*: $m = tg\alpha$



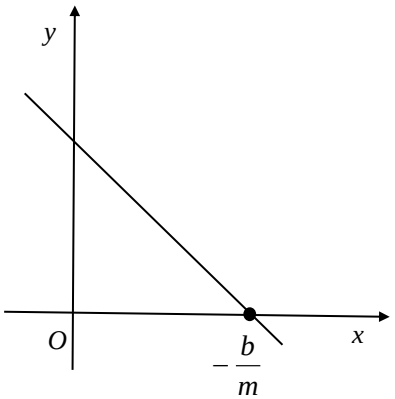
$y = mx + b$

- La constante b recibe el nombre de **ordenada al origen** o **parámetro de posición**. Geométricamente representa la intersección de la recta con el eje y.



$y = mx + b$

- El cero de la función es $x = -\frac{b}{m}$, geométricamente representa la intersección de la recta con el eje x.

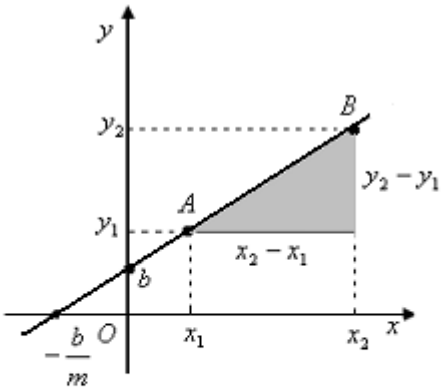


$y = mx + b$

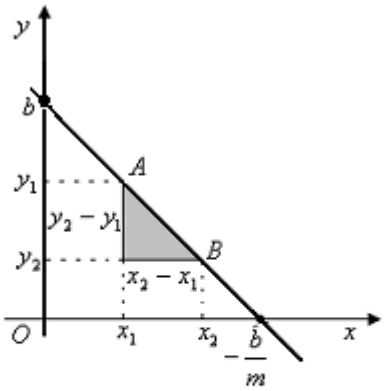
Cálculo de la pendiente

Consideremos la recta que pasa por los puntos $A=(x_1, y_1)$ y $B=(x_2, y_2)$. El cociente entre la diferencia de ordenadas y la diferencia de abscisas de dichos puntos es la pendiente de la recta, es un valor que permanece constante. De acuerdo a los siguientes gráficos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



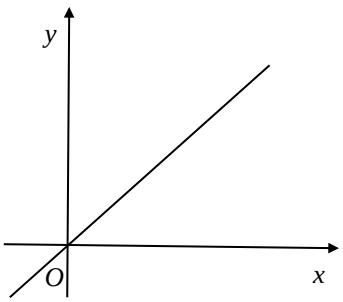
La **pendiente es positiva**, **la función crece** porque $y_2 - y_1$ como $x_2 - x_1$ son números positivos.



La **pendiente es negativa**, **la función decrece** porque $y_2 - y_1$ es un número negativo y $x_2 - x_1$ un número positivo.

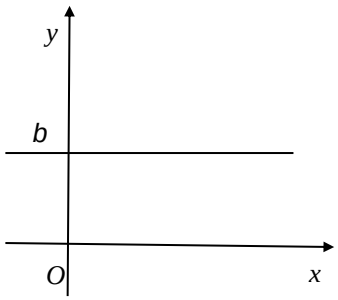
Casos especiales:

- Si $m \neq 0$ y $b = 0$, la ecuación de la recta resulta: $y = mx$ y representa una recta que pasa por el origen del sistema de coordenadas.



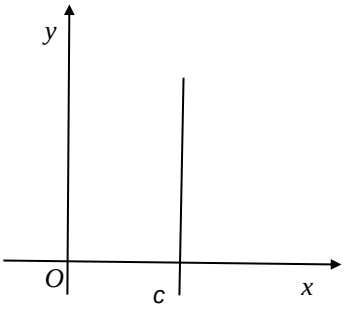
$y = mx$

- Si $m = 0$ y $b \neq 0$, la ecuación de la recta resulta: $y = b$ y representa una recta paralela al eje *x*. La función definida por dicha ecuación se llama **función constante**.



$y = b$

- Si $m = 0$ y $b = 0$, la ecuación de la recta resulta: $y = 0$, su gráfica es el eje *x*. La función definida por dicha ecuación se llama **función nula**.
- El conjunto de puntos $L = \{(x, y) \in R^2 / x = c\}$ tiene por representación gráfica en el plano real a una recta paralela al eje *y* para $c \neq 0$ y al eje *y* cuando $c = 0$. Observemos que L no es una función.



$x = c$

Ecuación de la recta dado un punto y la pendiente

Dado un punto $P_0 = (x_0, y_0)$ y un número real m, la ecuación de la recta de pendiente m y que contiene al punto P_0 es:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Rectas paralelas

Las rectas R_1 de ecuación $y = m_1 x + b_1$ y R_2 de ecuación $y = m_2 x + b_2$ son paralelas si y solo si sus pendientes son iguales, en símbolos:

$$R_1 \| R_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$$

Rectas perpendiculares

Las rectas R_1 de ecuación $y = m_1 x + b_1$ y R_2 de ecuación $y = m_2 x + b_2$ son perpendiculares si y solo la pendiente de una es la recíproca negativa de la otra, en símbolos:

$$R_1 \perp R_2 \Leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Sea la función de primer grado definida por

$$f(x) = ax + b \qquad (1)$$

tomando $f(x) = 0$, la expresión anterior se escribe:

$$ax + b = 0 \qquad (2)$$

denominada **ecuación de primer grado en la variable *x*.**

Por lo tanto, resolver una ecuación del tipo (2) implica hallar los **ceros o raíces** de $f(x) = ax + b$, que al ser de primer grado admite sólo un cero o raíz, es decir sólo un valor de x satisface la ecuación.

Por otra parte, como ya se vio, la gráfica de (1) es una recta y por lo tanto, resolver la ecuación (2) geométricamente significa, determinar la abscisa del punto de intersección de dicha recta con el eje x.

Ejemplo:

Resolver la ecuación $3x + 2 = 0$ (I)

Sumando -2 a ambos miembros y aplicando la asociatividad de la suma:

$$3x + [2 + (-2)] = 0 + (-2)$$

por la propiedad del neutro aditivo

$$3x = -2 \qquad (II)$$

Multiplicando por $\frac{1}{3}$ a ambos miembros y aplicando la asociatividad del producto:

$$\left(\frac{1}{3}.3\right)x = \frac{1}{3}.(-2)$$

y por la propiedad del inverso y el neutro para el producto se obtiene:

$$x = -\frac{2}{3} \qquad (III)$$

que es la única solución de la ecuación dada.

En la práctica se sintetiza el procedimiento efectuando los pasos marcados por $(I), (II)\, y\, (III)$.

Ecuaciones equivalentes

Dos o más ecuaciones son equivalentes cuando admiten el mismo conjunto solución.
Esta definición es importante en la práctica ya que una ecuación complicada de resolver se puede llevar a otra equivalente de resolución más sencilla, empleando las siguientes propiedades de las ecuaciones equivalentes:

- Si se suma en ambos miembros de una ecuación un mismo término, se obtiene otra ecuación equivalente a la dada.
- Si se suma en ambos miembros de una ecuación un mismo número distinto de cero, se obtiene otra ecuación equivalente a la dada.

3. SISTEMAS DE DOS ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON DOS INCÓGNITAS

Una ecuación lineal con dos incógnitas es una ecuación de la forma:

$$ax + by + c = 0 \qquad \text{con } a \neq 0 \text{ y } b \neq 0\,.$$

Resolver una ecuación lineal (de primer grado con dos incógnitas), significa hallar los pares ordenados (x, y) que satisfacen la igualdad $ax + by + c = 0$.

Se observa además, que la expresión $ax + by + c = 0$ corresponde a la ecuación de una recta en el plano, tal que cada uno de sus puntos verifica la igualdad y por lo tanto es solución de la ecuación dada, por lo que ésta tiene infinitas soluciones.

Ejemplo:

La ecuación $2x + y = 3$ tiene por conjunto solución a: $S = \{(0,3), (1,1), (2,-1), \ldots\}$

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Si se consideran simultáneamente dos ecuaciones lineales con dos incógnitas se tiene lo que se denomina un sistema y se denota:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

El conjunto solución S del sistema está formado por el par o los pares ordenados (x, y), si es que existen, que satisfacen ambas ecuaciones.

Si $S = \varnothing$ el sistema se dice que es **incompatible** (no admite solución)

Si $S \neq \varnothing$ el sistema se dice que es c**ompatible**

- **determinado** cuando admite una única solución.
- **indeterminado** cuando admite infinitas soluciones.

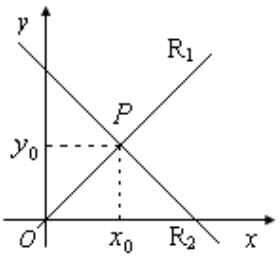
Interpretación geométrica

Sea el sistema $\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$

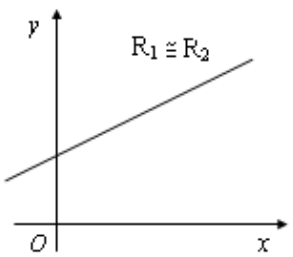
Como ya se dijo, cada una de las ecuaciones que componen el sistema corresponde a la ecuación de una recta en el plano, de modo que resolver un sistema de este tipo equivale a determinar el o los puntos de intersección, si es que existen, de tales rectas.

Dos rectas del plano pueden:

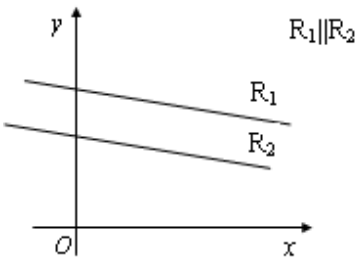
- ***Intersecarse en un punto***, en cuyo caso el sistema tiene ***solución única*** que son las coordenadas de dicho punto. (**Sistema compatible determinado**)



- ***Ser coincidentes***, en cuyo caso el sistema tiene ***infinitas soluciones*** que son las coordenadas de los infinitos puntos de la recta. (**Sistema compatible indeterminado**)



- ***Ser paralelas*** (no coincidentes), en cuyo caso el sistema ***no tiene solución.*** (**Sistema incompatible**)



Los métodos para resolver sistemas de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas son:

A) Método de sustitución.

B) Método de igualación.

C) Método de reducción por sumas o restas.

D) Método de determinantes o de Crammer.

F) Método gráfico.

A) Método de sustitución

El método de sustitución consiste en despejar una de las incógnitas en una de las ecuaciones y sustituir su expresión en la otra, la cual se transformará en una ecuación con una incógnita. Una vez conocido el valor de dicha incógnita se obtiene, de inmediato, el valor de la otra.

Ejemplo:

Resolver el sistema

$$\begin{cases} 2x - 5y = 16 \\ 4x + y = 10 \end{cases}$$

1. Despejar una de las variables de una de las ecuaciones. Conviene despejar y de la segunda ecuación:

$$y = 10 - 4x \qquad \text{(I)}$$

2. Sustituir su valor en la primera ecuación:

$$2x - 5.(10 - 4x) = 16$$

3. Resolver la ecuación resultante

$$2x - 50 + 20x = 16$$

$$22x = 66 \text{ entonces } \quad x = \frac{66}{22} = 3$$

4. Sustituir el valor de x en (I)

$$y = 10 - 4x = 10 - 4 \cdot 3 = 10 - 12 = -2$$

Luego $S = \{(3,-2)\}$

B) Método de igualación

El método de igualación consiste en despejar la misma incógnita en las dos ecuaciones e igualar sus expresiones, obteniendo así una ecuación con una incógnita. Una vez resuelta se obtiene el valor de la otra incógnita.

Para resolver por el método de igualación el sistema de ecuaciones dado anteriormente se procede de la siguiente manera:

1. Despejar una de las variables en las dos ecuaciones, en este caso elegimos x**:**

$$x = \frac{16+5y}{2} \quad \text{(I)} \qquad\qquad x = \frac{10-y}{4} \quad \text{(II)}$$

2. Igualar las dos ecuaciones (I) = (II)

$$\frac{16+5y}{2} = \frac{10-y}{4}$$

Observar que queda una ecuación de primer grado con una incógnita

3. Resolver la ecuación resultante:

$$\begin{gathered} 4.(16+5y) = 2.(10-y) \\ 64+20y = 20-2y \\ 20y+2y = 20-64 \\ 22y = -44 \\ y = -2 \end{gathered}$$

4. Reemplazar el valor de y en la ecuación (I) o en la (II):

$$x = \frac{16+5y}{2} = \frac{16+5(-2)}{2} = 3$$

Luego $S = \{(3,-2)\}$

C) Método de reducción por sumas o restas.

El método de reducción por sumas o restas para resolver un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas se emplea de la siguiente manera:

- Se suman o restan las dos ecuaciones con el objeto de eliminar una de las variables.
- A veces es necesario multiplicar las ecuaciones dadas originalmente por una constante antes de que sea posible eliminar una de las variables mediante la suma o la resta de las ecuaciones.

Ejemplo:

Resolver por reducción el sistema:

$$\begin{cases} 2x - 5y = 16 \\ 4x + y = 10 \end{cases}$$

1. Multiplicar los dos miembros de la primera ecuación por 2 con el fin de que el coeficiente de ***x*** sea el mismo en ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} 4x - 10y = 32 \\ 4x + y = 10 \end{cases}$$

2. Restar miembro a miembro ambas ecuaciones, obteniendo así:

$$-11y = 22$$

3. Despejar *y*:

$$y = \frac{22}{-11} \text{ entonces } y = -2$$

4. Sustituir el valor de *y* en una de las ecuaciones iniciales:

$$2x - 5(-2) = 16$$

$$2x + 10 = 16$$

$$2x = 6$$

$$x = 3$$

Luego $S = \{(3,-2)\}$

D) Método de Determinantes o de Crammer.

Dado el sistema:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$$

Se consideran los siguientes determinantes:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1 \ , \ \Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=c_1b_2-c_2b_1 \quad \text{y} \quad \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=a_1c_2-a_2c_1$$

Si ocurre que:

- $\Delta \neq 0$, el sistema es **compatible determinado** y la única solución está dada por:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta} \quad \text{y} \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta} \qquad \text{luego} \qquad S=\{(x,y)\}$$

- $\Delta=0 \ \wedge \ \Delta_x=0 \ \wedge \ \Delta_y=0$, el sistema es **compatible indeterminado**.

- $\Delta=0 \ \wedge \ (\Delta_x \neq 0 \vee \Delta_y \neq 0)$, el sistema es **incompatible**.

Ejemplo 1:

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2x-5y=16 \\ 4x+\ y\ =10 \end{cases}$, se calcula el determinante.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}=2+20=22\neq 0$$ luego el **sistema** es **compatible determinado**.

Por otra parte:

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 16 & -5 \\ 10 & 1 \end{vmatrix}=16+50=66 \qquad \Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 16 \\ 4 & 10 \end{vmatrix}=20-64=-44$$

Por lo tanto: $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{66}{22}=3 \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=-\frac{44}{22}=-2$

Luego el conjunto solución del sistema dado es: $S=\{(3,-2)\}$

Ejemplo 2:

Dado el sistema $\begin{cases} x-3y=2 \\ 2x-6y=0 \end{cases}$, se tiene que:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{vmatrix}=-6+6=0 \qquad \text{y} \qquad \Delta_x=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}=-12+0=-12\neq 0$$

Por lo que el **sistema** es **incompatible** y por lo tanto el conjunto solución es $S=\varnothing$.

Ejemplo 3:

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} x+2y=4 \\ 3x+6y=12 \end{cases}$, se tiene que:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 6-6=0, \qquad \Delta_x = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 12 & 6 \end{vmatrix} = 24-24=0 \qquad \text{y} \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 12 \end{vmatrix} = 12-12=0$$

Por lo que el **sistema** es **compatible indeterminado.**

Observemos, en este último ejemplo, que la segunda ecuación se obtiene de la primera multiplicándola miembro a miembro por 3, por lo que resultan ecuaciones equivalentes y por lo tanto tienen el mismo conjunto solución:

$$S = \{(x,y) \in R^2 / x+2y=4\}$$

O bien expresando a y en función de x:

$$S = \left\{(x,y) \in R^2 / y = -\frac{1}{2}x+2\right\}$$

E) Método Gráfico

La representación gráfica de un sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas determina un par de rectas. Si éstas se **cortan**, el **sistema es compatible determinado**; si las **rectas** son **paralelas**, el **sistema es incompatible** y si las **rectas** son **coincidentes**, el **sistema es compatible indeterminado**.

Ejemplo:

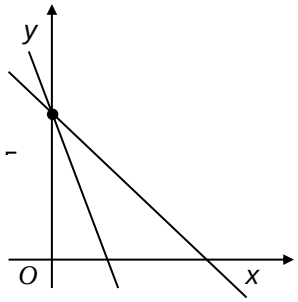
Sea el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 3x+2y=10 \\ 2x+y=5 \end{cases}$

Para hallar la solución por el método gráfico se procede de la siguiente manera:

1. Despejar *y* de ambas ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x+2y=10 & \rightarrow \quad y=-\frac{3}{2}x+5 \\ 2x+y=5 & \rightarrow \quad y=-2x+5 \end{cases}$$

2. Representar las rectas asociadas a dichas ecuaciones.



En este caso $S = \{(0,5)\}$.

4. FUNCIÓN DE SEGUNDO GRADO. ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA.

En muchas acciones que se realizan en la vida diaria, aparecen curvas. De ellas nos interesan aquellas que describen, por ejemplo, la trayectoria que sigue la pelota cuando se juega al voleibol y a la cual se la denomina ***parábola.***

La función que tiene por gráfica a dicha curva se llama ***función cuadrática***.

Función Cuadrática

Toda función de **segundo grado** o **cuadrática** en la variable x puede expresarse por:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$

Las funciones cuadráticas tienen las siguientes particularidades:

- Su representación gráfica en el plano real es una ***parábola.***
- El dominio es el conjunto de los números reales, salvo que se indique lo contrario.
- La imagen es un subconjunto de los números reales y depende de los valores de a, b y c
- La igualdad $y = ax^2 + bx + c$ es la ecuación de la parábola, en donde:

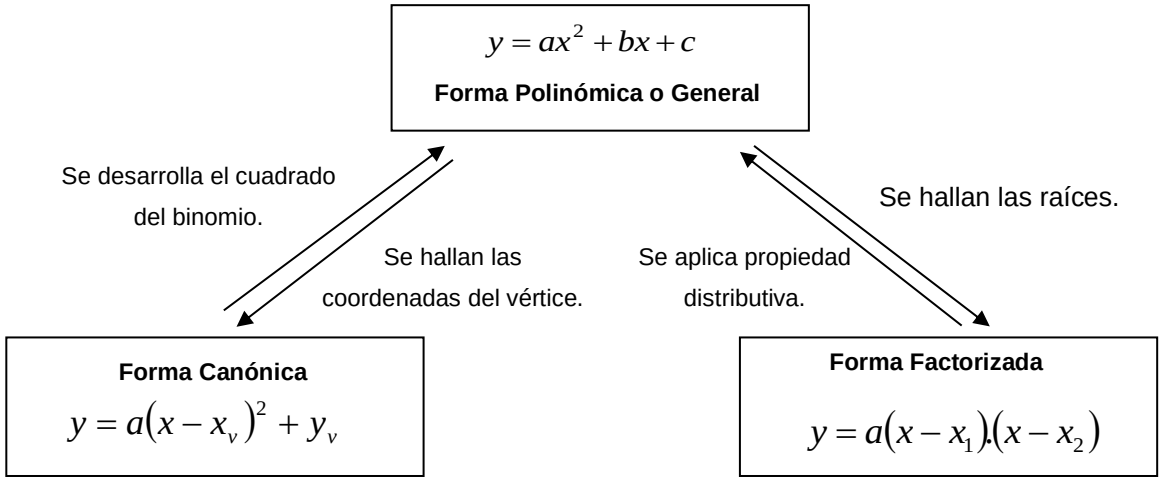
  a es el coeficiente del ***término cuadrático***

  b es el coeficiente del **término lineal**

  c se denomina **término independiente**

- La ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ puede escribirse (empleando técnicas algebraicas) como $y = a(x - x_v)^2 + y_v$ llamada **forma canónica** (donde x_v e y_v son las coordenadas del vértice).
- La ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ puede escribirse como $y = a(x - x_1).(x - x_2)$ llamada **forma factorizada** (donde x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$).

Nota: Para expresar la ecuación de la parábola en sus distintas formas, es importante tener presente el siguiente esquema.

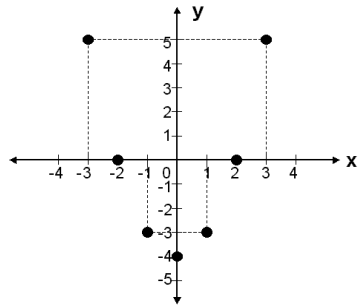


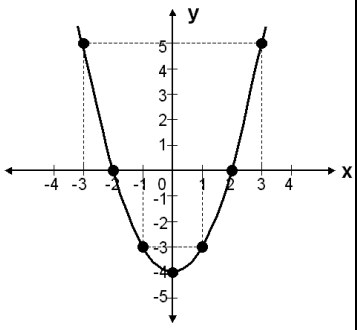
¿Cómo graficar una parábola?

✓ Una manera de graficar la función cuadrática es haciendo uso de una ***tabla de valores*** como lo muestra el siguiente ejemplo: $y = x^2 - 4$

PRIMER PASO Hacer una tabla de valores	SEGUNDO PASO Representar los puntos	TERCER PASO Unir los puntos con una línea continua

x	y
-3	5
-2	0
-1	-3
0	-4
1	-3
2	0
3	5





✓ Otra manera de graficar la función cuadrática es teniendo en cuenta sus elementos:

La parábola definida por la ecuación:

$$y = ax^2 + bx + c \qquad \text{o por} \qquad y = a(x - x_v)^2 + y_v$$

es una curva que presenta las siguientes características generales:

- Posee un **eje de simetría**, paralelo o coincidente con el eje $"y"$, de ecuación:

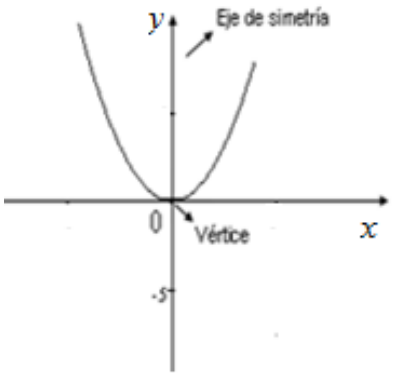
$$x = -\frac{b}{2a} \quad \text{o bien} \quad x = x_v$$

- Un punto especial llamado **vértice**, que es el punto de intersección de la parábola con el eje de simetría. Además, es el punto donde la parábola alcanza el valor máximo o mínimo, (recordar que: se llama **mínimo** de una función al menor número que tiene su imagen y se llama **máximo** de una función al mayor número que tiene su imagen).

  Las coordenadas del vértice están dadas por:

$$y = x^2$$

$$\mathrm{V} = \left(\frac{-b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a} \right) \quad \text{o} \quad \text{bien} \quad \mathrm{V} = (x_v, y_v)$$



- La **concavidad** depende de a:

  Si $a > 0$, la concavidad es hacia arriba.

  Si $a < 0$, la concavidad es hacia abajo.

- La **ordenada al origen**:

La coordenada en "*x*" es igual a cero $(x=0)$; esto hace que, al sustituir $x=0$ en la ecuación $y=ax^2+bx+c$, se obtenga $y=a.0^2+b.0+c \Rightarrow y=c$

Con lo cual la intersección de la parábola con el eje "*y*", es el punto $(0,c)$.

Función cuadrática de la forma $y=ax^2 \quad (b=0 \ \wedge \ c=0)$

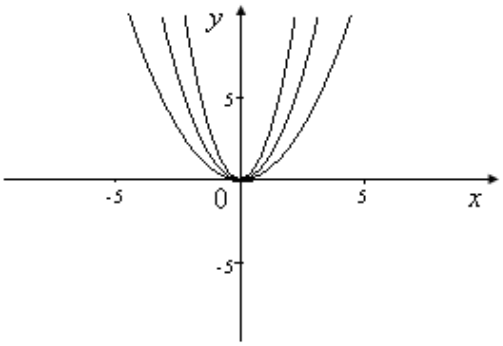
Cuando $a>0$

Ejemplos:

a) $y=4x^2$

b) $y=2x^2$

c) $y=\frac{x^2}{2}$



En la gráfica de dichas funciones se observa que las ramas de la parábola se abren hacia arriba.

El mínimo de las funciones es el cero.

Las ramas de la parábola se acercan al eje $"y"$ cuanto mayor es el valor absoluto de $"a"$.

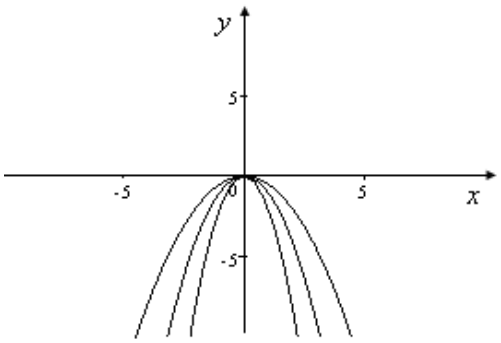
Cuando $a<0$

Ejemplos:

a) $y=-4x^2$

b) $y=-2x^2$

c) $y=-\frac{x^2}{2}$



Al graficar dichas funciones puede observarse que las ramas de la parábola se abren hacia abajo.

El máximo de las funciones es el cero.

Las ramas de la parábola se acercan al eje $"y"$ cuanto mayor es el valor absoluto de $"a"$

Función cuadrática de la forma $y=ax^2+c \qquad (b=0 \wedge c\neq 0)$

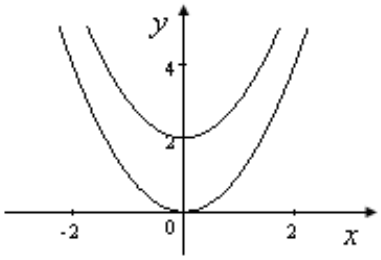
Ejemplos:

a) $y = 2x^2 + 2$

b) $y = 2x^2$

La gráfica de la función dada por $y = 2x^2 + 2$ es el resultado de desplazar $"c"$ unidades respecto al eje $"x"$ a la función de ecuación $y = 2x^2$.

El parámetro $"c"$ indica las unidades de desplazamiento de la parábola en la dirección vertical, hacia arriba si $c > 0$ y hacia abajo si $c < 0$.



Función cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$

Cuando $b \neq 0$ no resulta tan evidente cual es el eje de simetría de la parábola y cual es su vértice.

Si se quiere graficar una función cuadrática del tipo $y = ax^2 + bx + c$, se debe hallar el vértice, el eje de simetría y el punto de intersección con el eje $"y"$.

Ejemplo:

Dada la función de la forma: $y = x^2 - 2x - 3$

- $a > 0$, luego la concavidad es hacia arriba.
- Para obtener el vértice se emplea la fórmula: $V = \left(\frac{-b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a} \right)$ y reemplazando se obtiene:

$$V = \left(\frac{-(-2)}{2.1}, -3 - \frac{(-2)^2}{4.1} \right) = (1,-4)$$

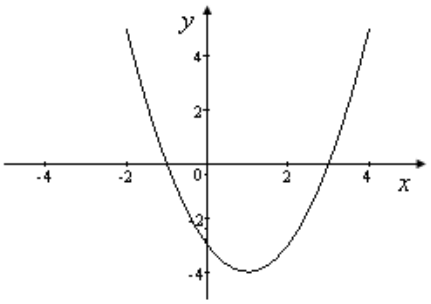
- Para hallar el eje de simetría se aplica la fórmula: $x = -\frac{b}{2a}$

  Por lo que el eje de simetría es la recta de ecuación $x = 1$

- Para hallar el punto de intersección con el eje "*y*" se procede del siguiente modo:
  La coordenada en "*x*" es igual a cero $(x = 0)$; esto hace que, al sustituir $x = 0$ en la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, se obtenga $y = a.0^2 + b.0 + c \Rightarrow y = c$

Con lo cual la intersección de la parábola con el eje "*y*", es el punto $(0,c)$. Para el caso de nuestro ejemplo, dicho punto es $(0,-3)$.

Luego la gráfica es:



En ella se observa que:

$D_f = R$

$I_f = [-4,+\infty)$

El mínimo de la función es -4

Ecuación de segundo grado con una incógnita

Sea la función de segundo grado definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$

Tomando $f(x) = 0$, la expresión anterior se escribe:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

que se denomina **ecuación de segundo grado en la variable *x*.**

Por lo tanto, resolver esta ecuación implica hallar los ceros o raíces reales de la función de ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ya que la función es de segundo grado, se tienen **dos raíces** o **ceros**.

Por otra parte, como ya se vio, la gráfica de dicha función es una parábola y por lo tanto, resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ **geométricamente significa** determinar las abscisas de los puntos de intersección, si es que existen, de la parábola con el eje "*x*".

Para determinar las posibles soluciones (o sea los **ceros** o **raíces reales**) se emplea la fórmula:

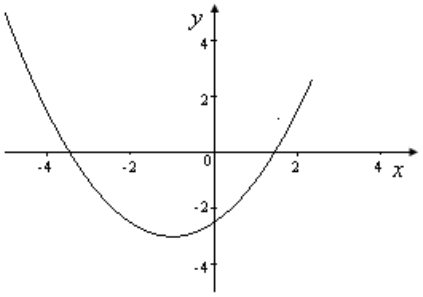
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esto muestra que a lo sumo existen dos soluciones reales, que dependen del valor que tome $b^2 - 4ac$ llamado **discriminante de la ecuación**.

- Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales **distintas**.

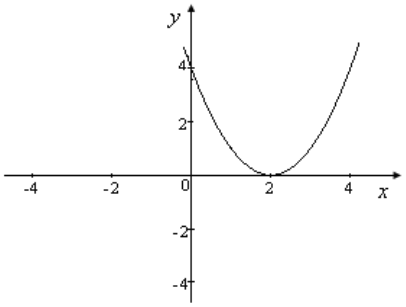
$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Por lo tanto la parábola corta al eje "*x*" en los puntos $(x_1,0)$ y $(x_2,0)$.



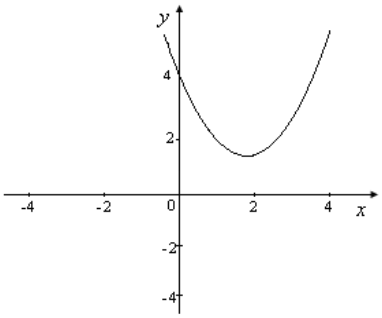
- Si $b^2-4ac=0$, la ecuación tiene una sola raíz real llamada **raíz doble**:

  $x_{1,2} = -\frac{b}{2a}$ Por lo tanto la parábola corta al eje "*x*" en un solo punto.



- Si $b^2-4ac<0$, la ecuación **no tiene soluciones reales**.

  Lo que significa que la parábola no corta al eje "*x*".



Propiedades de las raíces

Dada la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$, tal que sus raíces son x_1 y x_2, entonces se cumple la siguiente relación entre las raíces y los coeficientes de la ecuación:

- $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$
- $x_1 . x_2 = \frac{c}{a}$

Como aplicación de estas relaciones, se puede reconstruir la ecuación conociendo sus raíces.

Ejemplo 1:

Determinar sin resolver la ecuación, la naturaleza de las raíces:

$$-2x^2 + 5x + 1 = 0$$

Calculamos $\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4(-2).1 = 25 + 8 = 33 > 0 \Rightarrow \Delta > 0$

Luego las raíces son reales y distintas.

Ejemplo 2:

Indicar el tipo de raíces de las ecuaciones de segundo grado que se dan a continuación. En caso de tener raíces reales, encontrar las mismas.

a) $x^2 - x + 2 = 0$

Calculamos $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4.1.2 = 1 - 8 = -7 < 0 \Rightarrow \Delta < 0$

Luego la ecuación dada no tiene soluciones reales.

b) $x + 9x^2 - 1 = 0$

$9x^2 + x - 1 = 0$

Calculamos $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4.9.(-1) = 1 + 36 = 37 > 0 \Rightarrow \Delta > 0$

por lo tanto la ecuación dada tiene dos soluciones reales y distintas.

En efecto:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{37}}{2.9} = \begin{cases} x_1 = -\frac{1}{18} + \frac{\sqrt{37}}{18} \\ x_2 = -\frac{1}{18} - \frac{\sqrt{37}}{18} \end{cases}$$

c) $-4x^2 + 4x - 1 = 0$

Multiplicando por -1 se tiene:

$$4x^2 - 4x + 1 = 0$$

Calculamos $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4.4.1 = 16 - 16 = 0 \Rightarrow \Delta = 0$

Luego la ecuación dada tiene raíz real doble.

En efecto:

$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2.4} = \frac{1}{2}$ Por lo tanto: $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$

Ejemplo 3:

Hallar la ecuación de segundo grado cuyas raíces son 1 y $-\frac{2}{3}$.

Hacemos:

$$x_1 + x_2 = 1 + \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{3-2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{1}{3} \quad = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 . x_2 = 1.\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3} \qquad \Rightarrow x_1 . x_2 = -\frac{2}{3} = \frac{c}{a}$$

De donde $x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3} = 0$

multiplicando ambos miembros por 3, se obtiene:

$3x^2 - x - 2 = 0$ que es la ecuación buscada.

ACTIVIDADES

- **Actividad 1:** Dados los conjuntos: $A=\{2,3\}$ $B=\{x,y,z\}$ $C=\{a\}$

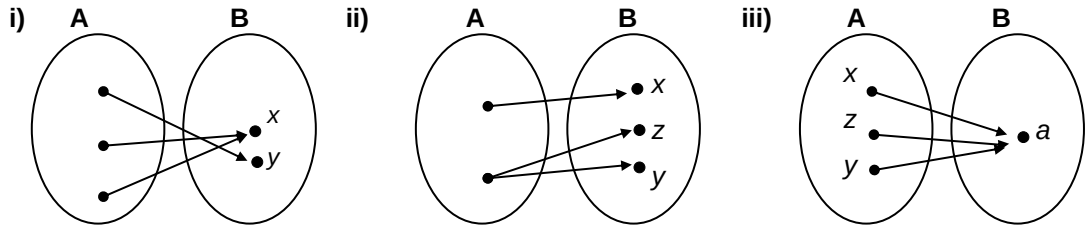
  a) Definir por extensión $A\times B,\quad A\times C,\quad B\times C,\quad A^2$

  b) Hallar el número de elementos de cada uno de los productos cartesianos anteriores e indicar como lo obtiene.

  c) Para los productos cartesianos del ítem a), realizar las diferentes formas de representación.

- **Actividad 2:**

  a) Analizar cuáles de los siguientes diagramas corresponden a funciones



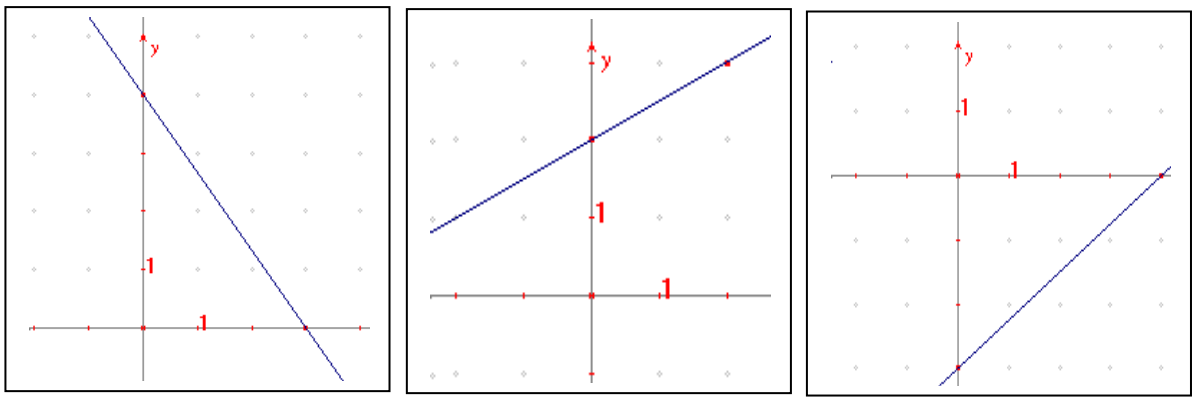
  b) Responder ¿Para cuáles de estas relaciones se verifica que la inversa es función?

- **Actividad 3:** Graficar las siguientes funciones lineales.

  a) $y=x+2$ b) $y=-2x+4$ c) $y=-\frac{3}{4}x+1$

  d) $y=-2+3x$ e) $y=-x$ f) $y=-\frac{1}{2}$

- **Actividad 4:** Determinar las ecuaciones de las funciones cuyos gráficos se dan a continuación.



- **Actividad 5:** Dada la función

  $f:R\to R$ tal que $f(x)=2x-1$

a) Determinar $f(0)$, $f(-1)$, $f\left(-\frac{1}{2}\right)$

b) La preimagen de 3 mediante f

c) La imagen de 2

d) El valor de x tal que $f(x)=10$

- **Actividad 6:** Sea la función dada por $y=-x-\frac{5}{2}$. Determinar:

a) Dominio con notación de conjunto

b) Imagen con notación de intervalo

c) Pendiente

d) Ordenada al origen

e) Cero de la función

f) ¿Es creciente o decreciente?

- **Actividad 7:** Determinar el o los valores de "a" para que el punto P pertenezca al gráfico de la función cuya ecuación se especifica

a) $P=(3,3)$, $y=ax-3$ b) $P=(3,-2)$, $-2x+3y-a=0$

- **Actividad 8:** Representar gráficamente las siguientes funciones y analizar si son crecientes, decrecientes o constantes:

a) $y=-2x+3$ b) $y=x-3$

c) $y=-2+4x$ d) $y=-2$

e) $y=-\frac{2}{3}x$ f) $y=2(x-1)+3x+1$

- **Actividad 9:** Determinar, en cada caso, la fórmula de una función lineal de modo que su gráfica verifique las condiciones indicadas:

a) Contiene al punto $(2;5)$ y su pendiente es -3.

b) Contiene a los puntos $(0;3)$ y $(4;0)$

c) Contiene al punto $(1;5)$ y es paralela al eje x.

d) Contiene al origen de coordenadas y es perpendicular a la recta de ecuación

$$x-\frac{2}{3}y=\frac{1}{6}$$

- **Actividad 10:** En cada caso, hallar la ecuación de una recta que cumpla con la indicada:

a) Que su ordenada al origen sea 1 y que contenga al punto $(2;5)$.

b) Que su pendiente sea 7 y que pase por el punto $(-3;5)$.

- **Actividad 11:** Considerar la recta $L_1 : y=-\frac{1}{5}x+3$

a) Hallar la ecuación de una recta paralela a L_1, que contenga al punto $(1;1)$.

b) Hallarla ecuación de una recta perpendicular a L_1, que contenga al punto $(1;1)$

- **Actividad 12:** Resolver las siguientes ecuaciones. Verificar su resultado

a) $3\cdot(x-2)+1=(-6x+9):(-3)$

b) $\frac{1}{3}x-1=2\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{5}\right)$

c) $5\left(0,\hat{2}x+\frac{1}{3}\right)+\frac{3}{2}=\frac{1}{6}x$

d) $(x+1)(x-2)=x^2-0,5$

e) $\frac{3x+2}{4}=\frac{5x+1}{2}$

f) $\frac{2x-10}{3x-20}=\frac{7}{8}$

g) $\frac{3(5x+2)}{17}=x$

h) $\frac{9x}{4}-6=\frac{2x}{3}+\frac{1}{3}$

i) $\frac{x+1}{3}+3=\frac{x+14}{9}$

j) $2\left(\frac{x+5}{3}\right)=x+3$

- **Actividad 13:** Resolver, de ser posible, en forma analítica y gráfica los siguientes sistemas de ecuaciones. Clasificar

a) $\begin{cases}3x-2y=5\\x+2y=7\end{cases}$

b) $\begin{cases}5x-y=9\\2x+4y=8\end{cases}$

c) $\begin{cases}x-3y=-1\\-2x+6y=2\end{cases}$

d) $\begin{cases}x+2y=4\\x+2y=8\end{cases}$

e) $\begin{cases}x=\frac{4-5y}{3}\\x=\frac{8y+2}{-6}\end{cases}$

f) $\begin{cases}x+\frac{3}{2}y=\frac{21}{2}+\frac{x}{4}\\\frac{2x-2}{3}=\frac{2x-y}{6}\end{cases}$

- **Actividad 14:** Graficar las funciones cuyas ecuaciones se dan a continuación y determinar el dominio y la imagen.

a) $y = \frac{x^2}{3}$ b) $y = 3x^2 + 1$ c) $y = x^2 - 3x + 5$

d) $y = -0{,}5x^2; \quad para \quad x \in [0,8]$ e) $y = 2x^2; \quad para \quad x \in (-6,3]$

f) $y = 5x^2 - 5; \quad para \quad x \in (-5,-2)$ g) $y = 6x^2 - 12x + 12; \quad para \quad x \in (-1,3)$

- **Actividad 15:** Indicar la concavidad, vértice, raíces, eje de simetría y ordenada al origen de las funciones cuyas ecuaciones se dan a continuación. Graficar.

a) $y = 2x^2 - 8x + 6$ b) $y = -x^2 + 2x + 3$

c) $y = \frac{1}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{12}$ d) $y = 4x^2 + 8x + 8$

- **Actividad 16:** Dibujar la gráfica de la parábola que cumpla con las siguientes condiciones:

Corta al eje x en 2 y 6 , corta al eje "y" en 18 y tiene vértice en (4;-6)

- **Actividad 17:** Completar el siguiente cuadro:

Forma General	**Forma Canónica**	***Forma Factorizada***
$y = x^2 + 4x + 3$		
		$y = -\frac{1}{2}(x-1)(x+3)$
	$y = -4(x-1)^2 + 4$	

- **Actividad 18:** Hallar la ecuación de la parábola que cumpla con cada una de las siguientes condiciones

a) El vértice es $\left(-\frac{1}{2};2\right)$ y las raíces se encuentran a 2,5 unidades del eje de simetría.

b) El vértice es (0;-6) y el punto (3;0) pertenece a la parábola.

c) Las raíces son $x_1 = 3$ y $x_2 = 5$ y la ordenada del vértice es 4.

d) Las raíces son $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$ y el vértice es (x_v ; $2\,x_v$)

- **Actividad 19:** Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 = 81$ b) $x^2 = 7x$

c) $14x^2 - 28 = 0$

d) $21x^2 + 100 = -5$

e) $x^2 - 3x + 2 = 0$

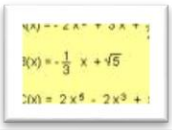
f) $x^2 + 4x = 285$

g) $(x+6)(x-6) = 13$

h) $2x^2 - 6x = 6x^2 - 8x$

i) $(x-3)^2 - (2x+5)^2 = -16$

j) $(x+2)^2 = 1 - x(x+3)$



Módulo 3

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

"No hay rama de la Matemática, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día al fenómeno del mundo real"

NICOLAI LOBACHEVSKY

INTRODUCCIÓN

Los matemáticos pasaron de la aritmética (que se ocupa de los números concretos) al álgebra cuando se interesaron en las operaciones que podían realizarse con cualquier número, al que representaban con una letra.

En un principio, las operaciones se describían con muchas palabras, era la época del álgebra retórica. Más tarde, comenzó la etapa del álgebra sincopada, es decir, abreviada y en el siglo XVI comenzó la etapa del álgebra simbólica, que es la que utilizamos hoy, en la que asignamos una letra a cada incógnita y también a los números, cuando no son números concretos.

OBJETIVOS

- Clasificar expresiones algebraicas.
- Operar con polinomios.
- Factorizar polinomios aplicando los diferentes casos.

CONTENIDOS

1. Expresiones algebraicas.
2. Polinomios en una variable.
3. Operaciones con polinomios.
4. Factorización de polinomios.

1. EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Expresiones algebraicas

Se llama **expresión algebraica** a toda combinación de números y letras vinculados por las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Ejemplos: a) $2x+5y-z$ b) $5x^2-3x^{-1}+\frac{7}{\sqrt{y}}$

Clasificación de las expresiones algebraicas

Expresiones Algebraicas

Expresión Algebraica Racional

Son aquellas en que las variables están afectadas únicamente por las operaciones de suma, resta, multiplicación división y potenciación con exponentes enteros.

Expresión Algebraica Racional Entera

Son expresiones en que las variables están relacionadas con las operaciones de suma, resta y multiplicación. Si hay potencias, estas van con exponentes naturales o iguales a cero.

Ejemplo:

$x^2+6xy+\sqrt{2}y^3$

Expresión Algebraica Racional Fraccionaria

Son expresiones en que alguna de las variables forma parte de un divisor o figura en el numerador con exponente negativo.

Ejemplo:

$9a-3a^{-2}m$

Expresión Algebraica Irracional

Son aquellas en las que alguna de sus variables están afectadas por radicales o exponentes fraccionarios.

Ejemplos:

a) $5x-\frac{3}{2}\sqrt{y}$

b) $\frac{7}{3}m^2a^{\frac{3}{4}}$

Polinomio

Se llama polinomio a toda expresión algebraica racional entera.

Ejemplo:

$$-3x^4+\sqrt{5}xy+\frac{2}{3}x^2z^4$$

De acuerdo a la cantidad de términos que poseen los polinomios algunos reciben nombres especiales:

monomio $\rightarrow$ 1 término

binomio $\rightarrow$ 2 términos

trinomio $\rightarrow$ 3 términos

cuatrinomio $\rightarrow$ 4 términos

Observar que cada término (o sumando) de un polinomio es un monomio y está formado por una **parte numérica** llamada **coeficiente** y una **parte literal**.

Ejemplo:

$\sqrt{5}xy^3$: donde $\sqrt{5}$ se llama coeficiente y es la parte numérica; x e y se llaman variables o indeterminadas y es la parte literal.

Importante:

- El **grado de un monomio** es la suma de los exponentes de las letras (o variables) que contiene.
- El **grado de un polinomio** es el grado del monomio de mayor grado que participa en él.
- Un **polinomio es homogéneo** cuando todos sus términos son del mismo grado.

Nota: trabajaremos con polinomios en una sola variable.

2. POLINOMIO EN UNA VARIABLE

Se llama **polinomio de grado n en la variable (o indeterminada)** x, sobre el conjunto de los números reales, a toda expresión de la forma:

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \quad \text{con} \quad a_n\neq 0 \text{ y } n \text{ entero no negativo}$$

Notación:

- A los polinomios en la variable x se los simboliza con letras mayúsculas indicando la indeterminada entre paréntesis: $P(x);\ Q(x);\ T(x)$
- A a_0 se lo llama **término independiente** y a a_n se lo denomina **coeficiente principal.**

Ejemplos**:**

Determinar el grado de los siguientes polinomios.

a) $P(x) = 5x^4 + 3x^3 + 1$ es un polinomio de grado 4

b) $Q(x) = 2x - 1$ es un polinomio de primer grado

c) $R(x) = 7$ es un polinomio de grado 0

Polinomios Especiales

Polinomio nulo

Polinomio es aquel que tiene todos los coeficientes iguales a cero.

En símbolos:

$$P(x) = 0 + 0x + ... + 0x^n$$

$$P(x) = 0$$

El polinomio nulo carece de grado.

Polinomio opuesto

Dos polinomios son opuestos cuando los coeficientes de los términos de igual grado son números opuestos.

Ejemplo:

Sea $P(x) = 2x^2 + 7x - 45$ el polinomio opuesto es $P(x) = -2x^2 - 7x + 45$

Polinomio constante

Se llama polinomio constante a todo polinomio de grado cero.

Ejemplo:

$$P(x) = -\frac{2}{3}$$

En particular $P(x)=1$ se llama Polinomio Identidad y se lo simboliza generalmente como $I(x)$

Igualdad de polinomios

Dos polinomios no nulos, son iguales si y sólo si los coeficientes de los términos de igual grado son iguales (a los términos de igual grado se los denomina ***términos semejantes***).

Ejemplo:

$$P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2 \qquad Q(x)=2+3x^2$$

$P=Q$ si y sólo si $a_0=2,\ a_1=0$ y $a_2=3$

Polinomios completos y ordenados:

Un polinomio en la variable x se dice que está **completo y ordenado**, cuando figuran todas las potencias de x menores al grado del polinomio y los términos están ordenados según estas potencias en forma creciente o decreciente.
Los polinomios se completan, agregando los términos que faltan con coeficiente cero.

Ejemplos:

a) $P(x)=3x^2+2x-1$ está completo y ordenado en forma decreciente

b) $Q(x)=-x^3+4x-3$ está incompleto ya que falta el término de grado 2.

Para completarlo se agrega ese término con coeficiente cero, quedando:

$$Q(x)=-x^3+0x^2+4x-3$$

Valor numérico

El valor numérico de un polinomio $P(x)$ es el número real que resulta al reemplazar la variable x por un número determinado y efectuar las operaciones que están indicadas.

Ejemplo:

El valor numérico de $P(x)=2x^3-x+3$ para $x=-1$ es:

$$P(-1)=2(-1)^3-(-1)+3=2(-1)+1+3=2$$

Adición de polinomios

La suma de dos o más polinomios es otro polinomio cuyos términos se obtienen sumando los términos de igual grado.

Ejemplo:

Dados los polinomios: $P(x) = -3x^4 + 6x^3 - 2x + 4$ y $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 2$. Realizar $P(x) + Q(x)$

Aplicando la definición:	Disposición práctica:
$P(x) + Q(x) = -3x^4 + (6+2)x^3 - 3x^2 + (-2+5)x + (4-2) =$ $-3x^4 + 8x^3 - 3x^2 + 3x + 2$	$-3x^4 + 6x^3 + 0x^2 - 2x + 4$ $+$ $2x^3 - 3x^2 + 5x - 2$ $-3x^4 + 8x^3 - 3x^2 + 3x + 2$

a) Asociativa

b) Conmutativa

c) Existencia del elemento neutro

El polinomio nulo $O(x)$ es tal que, para cualquier polinomio $P(x)$ se verifica que:

$$P(x) + O(x) = O(x) + P(x) = P(x)$$

d) Existencia del elemento opuesto

Para todo $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$, existe su opuesto

$-P(x) = -a_o + (-a_1)x + (-a_2)x^2 + \ldots + (-a_n)x^n$ que verifica:

$$P(x) + (-P(x)) = P(x) - P(x) = 0(x)$$

Diferencia de polinomios

Para restar el polinomio $Q(x)$ del polinomio $P(x)$ se debe sumar al polinomio $P(x)$ el opuesto de $Q(x)$:

$$P(x) - Q(x) = P(x) + [-Q(x)]$$

Ejemplo:

Calcular $P(x) - Q(x)$ si

$$P(x) = 3x^2 - 5x + 1 \quad \text{y} \quad Q(x) = x^2 - 7x - 3$$

Como el opuesto de $Q(x)$ es $-Q(x) = -x^2 + 7x + 3$, resulta:

$$\begin{array}{rr} & 3x^2 - 5x + 1 \\ + & -x^2 + 7x + 3 \\ \hline & 2x^2 + 2x + 4 \end{array}$$

Producto de polinomios

Para multiplicar dos polinomios se multiplica cada monomio de uno de ellos por cada uno de los términos del otro y luego se suman los coeficientes de los términos de igual grado (para operar se deben tener en cuenta la propiedad distributiva del producto respecto de la suma de números reales y del producto de potencias de igual base).

Ejemplo:

Dados dos polinomios:

$P(x) = 2x^3 - 3x^2 + x - 1$ y $Q(x) = -x^2 + 5x$, realizar el producto de los mismos.

Disposición práctica:

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + x - 1 \\ -x^2 + 5x \\ \hline 10x^4 - 15x^3 + 5x^2 - 5x \\ -2x^5 + 3x^4 - x^3 + x^2 \\ \hline -2x^5 + 13x^4 - 16x^3 + 6x^2 - 5x \end{array}$$

Entonces: $P(x).Q(x) = -2x^5 + 13x^4 - 16x^3 + 6x^2 - 5x$

O sea:

1) Multiplicamos un término del multiplicador por cada término del multiplicando.
2) Multiplicamos el otro término del multiplicador por cada término del multiplicando y encolumnamos los monomios de igual grado.
3) Efectuamos la suma.

El producto de polinomios verifica las siguientes propiedades:

a) Asociativa
b) Conmutativa
c) Existencia del elemento neutro para el producto.

El polinomio $I(x) = 1$ es tal que para cualquier polinomio $P(x)$ se verifica:

$$P(x).I(x) = I(x).P(x) = P(x)$$

¡Algunos productos notables!

- Cuadrado de un binomio $(x+a)^2 = (x+a)(x+a) = x^2 + 2xa + a^2$
- Cubo de un binomio $(x+a)^3 = (x+a)(x+a)(x+a) = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$
- Producto de la suma por la diferencia de dos números

$$(x+a)(x-a) = x^2 - ax + ax - a^2 = x^2 - a^2$$

Ejemplo:

$$\left(2x-3x^4\right)^2=(2x)^2-2.(2x).\left(3x^4\right)+\left(3x^4\right)^2=4x^2-12x^5+9x^8$$

O también

$$\left(2x-3x^4\right)^2=\left(2x-3x^4\right)\left(2x-3x^4\right)=4x^2-6x^5-6x^5+9x^8=4x^2-12x^5+9x^8$$

División de polinomios:

Para efectuar la división entre dos polinomios, el polinomio dividendo debe ser de grado mayor o igual que el grado del polinomio divisor y deben estar ordenados en forma decreciente.
Además, el polinomio dividendo debe estar completo.

Ejemplo:

Dados dos polinomios: $P(x)=3x^3-2x^2-1$ y $Q(x)=1-x+x^2$

Realizar la división de los mismos.

$$\begin{array}{rl} 3x^3-2x^2+0x-1 & \left|\underline{x^2-x+1}\right. \\ -3x^3+3x^2-3x & = \quad 3x+1 \\ \hline \qquad x^2-3x-1 & \\ \qquad -x^2+\ x-1 & \\ \hline \qquad\quad -2x-2 & \end{array}$$

Luego el cociente es $C(x)=3x+1$ y el resto es $R(x)=-2x-2$

La descripción del proceso es la siguiente:

1. El primer monomio del cociente se obtiene dividiendo el monomio de mayor grado del dividendo por el divisor: $3x^3:x^2=3x$
2. Se multiplica $3x$ por el divisor y el resultado se resta del dividendo.
3. Una vez obtenida la diferencia se inicia el proceso como si ésta fuera el dividendo.
4. El proceso concluye cuando la diferencia es de grado inferior al divisor.

Cuando el **resto** de la división es **cero**, entonces se dice que la **división es exacta** y que el dividendo, $P(x)$, es **múltiplo** de $Q(x)$, o bien que $P(x)$ es **divisible** por $Q(x)$ y se cumple la relación:

$$\boxed{P(x)=Q(x).C(x)}$$

Regla de Ruffini

Esta regla se emplea para dividir un polinomio por otro de la forma $x-a$, con $a\in R$.

Ejemplo:

Dados $P(x)=3x^3-2x+1$ y $Q(x)=x+1$

Se esquematiza:

①→	3	0	-2	1
② -1	↓	-3	3	-1
	③ 3	④ -3	⑤ 1	⑥ 0

Pasos:

① Se escriben los coeficientes del dividendo completo y ordenado.

② A la izquierda se escribe el opuesto del término independiente del divisor (es -1).

③ El primer coeficiente queda igual (es 3).

④ El segundo coeficiente se obtiene efectuando $3.(-1)$ y sumando este resultado a cero (es -3).

⑤ El tercer coeficiente se obtiene efectuando $(-3).(-1)$ y sumando este resultado a -2 (queda 1).

⑥ Por último, multiplicamos $1.(-1)$ y le sumamos 1 (es 0).

a) El resto de la división es el último número obtenido en el paso ⑥, es decir $R(x)=0$.

b) El polinomio cociente es de un grado menor que $P(x)$ y sus coeficientes son los obtenidos por la regla antes mencionada en los pasos ③, ④ y ⑤, este resulta:

$$C(x)=3x^2-3x+1$$

Si el divisor es de la forma $nx-a$, para poder aplicar Ruffini se debe tener presente que:

Si en una división dividimos el **divisor** por un número n, debemos dividir al **dividendo** por n para que el cociente sea el mismo. El **resto** queda dividido por n.

Teorema del resto

El resto de la división entre un polinomio $P(x)$ por otro de la forma $x-a$, con $a\in R$, es el valor numérico de $P(x)$ para $x=a$.

Ejemplo**:**

En el caso de la división del ejemplo anterior (donde se aplicó la regla de Ruffini)

$$P(-1)=3(-1)^3-2(-1)+1=3(-1)+2+1=-3+2+1=0$$

Luego el resto es $R(x)=0$

Cuando el valor del resto es cero, significa que el polinomio $P(x)$ es divisible por $x-a$. El valor de x que hace cero a $P(x)$ se denomina **cero o raíz** del polinomio.

4. FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Si dos expresiones algebraicas **A** y **B** se multiplican y su producto es **C**, es decir: **A.B=C**, cada una de las expresiones algebraicas **A** y **B** es un **factor** de **C**.

Ejemplo:

$(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$ entonces $(x-1)$ y $(x-3)$ son factores de x^2-4x+3

En la resolución de problemas matemáticos es a menudo conveniente determinar los factores de una expresión algebraica. El procedimiento para hallar estos factores (cuando existen) se denomina factores o descomposición en factores de la expresión dada.

Una expresión algebraica es **irreducible** o **prima** si no se puede expresar como el producto de otras expresiones. Por ejemplo $(x-1)$ es una expresión irreducible o prima.

Factorear o **factorizar** una expresión algebraica es expresarla como el producto de sus factores primos.

En el ejemplo dado anteriormente $(x-1)$ y $(x-3)$ son factores primos, por lo tanto la expresión

$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$, está factoreada.

Casos de Factoreo

Factor común: una expresión es factor común en una suma algebraica cuando figura en cada término como factor, por ejemplo $a.b+a.c$ el factor común es a .

Por la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma:

$$a.(b+c)=a.b+a.c$$

Recíprocamente

$$a.b+a.c=a.(b+c)$$

Por lo tanto**,** si en todos los términos de una expresión algebraica figura un factor común, dicha expresión es igual al producto de ese factor por la expresión que resulta de dividir cada término por el factor.

Ejemplo:

Sea el polinomio $P(x)=3x^2-6x=3\cdot x\cdot x-3\cdot 2\cdot x$, en el observamos que el factor 3 aparece en todos los términos, lo mismo que el factor x, luego el polinomio $P(x)$ se puede escribir como

$$P(x)=3x^2-6x=3x\cdot(x-2)$$

En algunos casos resulta conveniente extraer un factor de todos los términos, aunque no sea común a todos ellos. Por ejemplo, si necesitamos que el coeficiente del término cuadrático de $3x^2+5x-2$ sea 1, debemos extraer como factor de toda la expresión el número 3. Es decir:

$$3x^2+5x-2=3.\left(x^2+\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}\right)$$

Factor común por grupo: algunas expresiones presentan una estructura que nos permite formar grupos de igual cantidad de términos y sacar factor común en cada uno de esos grupos. Una vez hecho esto, aparece un nuevo factor común en todos los grupos.

Ejemplo:

$$P(x)=x^5-2x^4-3x+6$$

$P(x)=\underbrace{(x^5-2x^4)}_{x^4}+\underbrace{(-3x+6)}_{-3}$	Se forman grupos de igual cantidad de términos, de forma tal que en cada uno de ellos haya un factor común
$P(x)=x^4(x-2)-3(x-2)$	En cada término debe aparecer el mismo factor para poder extraerlo nuevamente como factor común.
$P(x)=(x-2)(x^4-3)$	Al sacar nuevamente factor común, la expresión queda factorizada a través del factor común por grupos.

Diferencia de cuadrados: al analizar los productos notables vimos que:

$$(a+b).(a-b)=a^2-b^2$$

Recíprocamente

$$a^2-b^2=(a+b).(a-b)$$

Luego toda diferencia de cuadrados es igual a la suma por la diferencia de las bases.

Ejemplo:

$4x^2 - y^2 = (2x)^2 - (y)^2 = (2x + y)(2x - y)$, con lo que este polinomio queda factoreado.

La suma de cuadrados $a^2 + b^2$ no se puede factorear en el conjunto de los números reales.

Trinomio cuadrado perfecto: en productos notables vimos que el cuadrado de un binomio es igual a:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$$

Recíprocamente

$$a^2 + 2.a.b + b^2 = (a+b)^2$$

esta expresión de tres términos recibe el nombre de **trinomio cuadrado perfecto**, luego, todo polinomio que cumpla con esta regla es igual al cuadrado del binomio formado por las bases de los cuadrados.

Ejemplo:

$$x^2 + 6x + 9 = (x)^2 + 2.3.x + (3)^2 = (x+3)^2$$

Cuatrinomio cubo perfecto: también vimos en los productos notables el desarrollo de $(a+b)^3$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3$$

Recíprocamente

$$a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3 = (a+b)^3$$

esta expresión de cuatro términos recibe el nombre de **cuatrinomio cubo perfecto**, luego, todo polinomio que cumpla con esta regla es igual al cubo del binomio formado por las bases de los cubos.

Ejemplo**:**

$$x^3 + 6.x^2 + 12.x + 8 = (x+2)^3$$

Binomios de la forma $a^n \pm b^n$, con $n \geq 3$

- Para $n = 3$ **(Suma o diferencia de cubos),** efectuando los siguientes productos, obtenemos

$$(a+b).(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a-b).(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

Recíprocamente

$$a^3 + b^3 = (a+b).(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b).(a^2 + ab + b^2)$$

Ejemplos:

a) $x^3 + 27 = x^3 + 3^3 = (x+3).(x^2 - x.3 + 3^2) = (x+3).(x^2 - 3x + 9)$

b) $x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x-1).(x^2 + x.1 + 1^2) = (x-1).(x^2 + x + 1)$

- Para $n > 3$, existen dos posibilidades

a) Binomios que pueden reducirse a diferencia de cuadrados, suma de cubos o diferencia de cubos.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} x^6 - y^6 &= (x^3)^2 - (y^3)^2 = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) \\ &= (x-y)(x^2 + xy + y^2)(x+y)(x^2 - xy + y^2) \\ &= (x-y)(x+y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2) \end{aligned}$$

b) Binomios que NO están incluidos en a)

Estos se pueden factorear por medio de las siguientes fórmulas:

$a^n + b^n$, si *n* es par: no se puede factorizar

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots \pm b^{n-1})$ si *n* es impar

$a^n - b^n = \begin{cases} (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1}) \\ (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots \pm b^{n-1}) \end{cases}$ cuando *n* es par

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1})$ si *n* es impar

Ejemplo:

$$\begin{aligned} x^5 - 32 = x^5 - 2^5 &= (x-2)(x^4 + x^3 2 + x^2 2^2 + x 2^3 + 2^4) \\ &= (x-2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16) \end{aligned}$$

En algunas expresiones se podrá aplicar, en forma sucesiva, más de un caso de factoreo. Para resolver estos ejercicios se sugiere factorear en el siguiente orden:

1 Buscar factor común, ya sea único o por grupos.

2 Si el polinomio tiene dos términos buscar diferencias de cuadrados o suma o diferencia de potencias de igual grado.

3 Si tiene tres términos puede ser el cuadrado de un binomio.

4 Si tiene cuatro términos puede ser el cubo de un binomio.

ACTIVIDADES

- **Actividad 1:** Marcar con una x las expresiones algebraicas que son polinomios:

a) $4x^2+\sqrt{3}$ ..... b) $x+\frac{5}{3}$ ..... c) $\frac{4}{x^3}$ .....

d) x^{-4} ..... e) $\frac{4}{x}$ ..... f) $3x^2+4x-1$ .....

- **Actividad 2:** Completar los siguientes enunciados.

a) El polinomio $5x^4-2x+4y+3m$ tiene _____términos.

b) En el polinomio $-x^3-4x^2-7$, el coeficiente del término x^3 es _____.

c) El grado del monomio $5x^4y$ es _____.

d) El grado del polinomio $2x^3y^2-3x^2y$ es _____.

e) El grado del monomio 8 es _____.

f) El grado del polinomio 0 es _____.

- **Actividad 3:** Determinar si la expresión dada es o no un polinomio. Si es un polinomio establecer el número de términos y su grado.

a) $6x^2y^5z$ b) $16a^4b^4c-1$

c) $5x^2-2x-\frac{1}{x}$ d) $6x^2y-17xyz+\sqrt{4}y^4$

e) 10 f) $5x^{-2}-x$

- **Actividad 4:** Clasificar las siguientes expresiones algebraicas. Colocar I (irracional), F(fraccionaria) y E(entera)

a) $\sqrt{2}x+5y^3$	b) $\sqrt{3x+7y}$	c) $\frac{4x^2-y^2}{\sqrt{3}}$	d) $\frac{\sqrt{7}x}{x-2}$	e) $\left(\frac{11x^2}{7x^7}\right)^{-1}$
f) $\frac{5w}{r+1}$	g) $4m^{-1}+5z$	h) $\frac{5}{3}x^7+\sqrt{2}y^8$	i) $9(x^{-4})^{-3}$	j) $\frac{5x^{-4}}{2x^{-10}}$

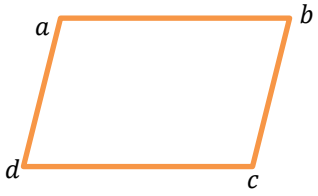
- **Actividad 5** ¿Cuál es el valor numérico de $\frac{5x^2}{3}-\frac{2xy}{5}+\frac{y}{3x}$ si $x=-2, y=\frac{1}{4}$?

- **Actividad 6:** Completar la siguiente tabla:

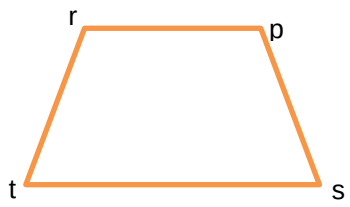
Polinomio	Polinomio Reducido	Nombre	Grado	CP	TI
$-5x^2+7-11x-13+7x^3+8x-2x^2-4x^2$					
$5+\frac{3}{5}x^2+0{,}25x-0{,}8x^2-\frac{3}{2}x-3{,}8$					
$0,\hat{1}x^5-2x^4-0{,}7x+x^4-0,1\hat{3}x^5+\frac{3}{5}x+3x^4$					
$0,\hat{2}x+\frac{2}{3}-7x^3+\frac{5}{6}x-0,\hat{6}x+6x^3-x$					
$-\frac{1}{3}x-0{,}5x^2-0,\hat{6}x-\frac{3}{5}+\frac{9}{2}x^2+0{,}2x^6+x-4x^2$					

- **Actividad 7:** Hallar la expresión reducida del perímetro de las siguientes figuras.

a) $\begin{cases}\overline{ab} &= 5x+2x^2-7\\ \overline{bc} &= 4-2x-3x^2\end{cases}$



b) $\begin{cases}\overline{rp} &= -9x+5x^3-6x^2\\ \overline{ps} &= 2-2x^3-4x^2+8x\\ \overline{ts} &= 5+3x+7x^2-x^3\end{cases}$



- **Actividad 8:** Dados los polinomios

$P(x)=x^5-3x^3+0,\hat{6}x \qquad Q(x)=4x^4-0,\hat{3}x+10$

$R(x)=2x^2+x-1 \qquad S(x)=-x \qquad T(x)=\frac{3}{2}x^2$

Hallar

a) $P(x)+Q(x)$ b) $Q(x)-[R(x)+S(x)]$

c) $P(x)-\frac{1}{2}Q(x)$ d) $P(x).R(x)$

e) $P(x):R(x)$ f) $[S(x)+T(x)]^2$

- **Actividad 9:** $P(x)=x^3+3x^2-x+1$ y $P(x)+Q(x)=2x^2-3$. Averiguar $Q(x)$.

- **Actividad 10:** Calcular

a) $\left(\frac{1}{2}x+3\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x-3\right)$

b) $\left(-\frac{3}{4}x+5x^2\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}x-5x^2\right)$

c) $\left(8x^2-\frac{1}{2}x\right)\cdot\left(8x^2+\frac{1}{2}x\right)$

d) $(x+5)^2$

e) $\left(\frac{7}{3}-4x\right)^2$

f) $\left(-\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x\right)^2$

g) $\left(3x+\frac{1}{2}\right)^3$

h) $\left(\frac{3}{4}x^2-2x\right)^3$

i) $\left(3x^3y-2x^5z\right)^2$

j) $(5m^{2x}+n^{4x})^2$

- **Actividad 11:** Si $P(x)=x^2+2x+1$ y $P(x).Q(x)=x^3+3x^2+3x+1$, encontrar *Q(x)*.
- **Actividad 12:** Resolver las siguientes divisiones aplicando la Regla de Ruffini

a) $\left(2x^3+2x^2-48x+72\right):(x-2)$

b) $\left(4x^4+\frac{1}{2}x\right):\left(x+\frac{1}{2}\right)$

c) $\left(\frac{1}{2}x^4-\frac{7}{4}x^3-\frac{17}{4}x^2+\frac{29}{2}x-6\right):(x-4)$

d) $\left(10x^3-\frac{7}{2}x+12x^2+1\right):(2x+3)$

- **Actividad 13:** Determinar los valores de *a* y *b* tales que x^3-ax^2+bx+2 sea divisible por x^2+3x-2.
- **Actividad 14:** Verificar si el valor indicado es o no una raíz (o cero) del polinomio dado

a) $P(z)=z^3+2z^2+2z+4$ $\quad z=-2$

b) $P(x)=x^4-3x^2+x+4$ $\quad x=2$

- **Actividad 15:** Aplicando el teorema del resto

a) Calcular n en $P(x)=2x^4-3x^3+nx^2-2{,}5x+6$, sabiendo que 1,5 es raíz de $P(x)$.

b) Calcular m para que el resto de dividir $S(x)=4x^3-x^2+mx-2$ por $x-2$ sea 26.

- **Actividad 16:** Factorizar los siguientes polinomios aplicando factor común:

a) $16a^6b^7c-12a^5b^2c^3+20a^3b^{10}$

b) $18x^2-12x+54$

c) $9(x+1)-3(x+1)^2$

d) $4x^2(2x-5)^2+8x^2(2x-5)$

- **Actividad 17:** Factorizar los siguientes polinomios aplicando factor común por grupo:

a) $am+bm+a^2+ab$

b) $6ax+3a^2-4bx-2ab$

c) $6a^2x+4ab+2a-3abx-2b^2-b$

d) $2mx^4+3nx^4+10m+15n$

- **Actividad 18:** Factorizar los siguientes polinomios aplicando diferencia de cuadrados:

a) x^2-9

b) $\frac{16}{9}x^2-\frac{1}{25}$

c) $(2x+3)^2-(x-1)^2$

d) $(x-1)^2-16y^2$

- **Actividad 19:** Factorizar los siguientes polinomios aplicando trinomio cuadrado perfecto:

a) x^2+6x+9

b) $4x^2+9y^2-12xy$

c) $(m+n)^2+(m+n)+\frac{1}{4}$

d) $1+\frac{2}{3}p+\frac{p^2}{9}$

- **Actividad 20:** Factorizar los siguientes polinomios aplicando cuatrinomio cubo perfecto:

a) $8m^6-36m^4x+54m^2x^2-27x^3$

b) $\frac{1}{8}-\frac{3}{4}a+\frac{3}{2}a^2-a^3$

c) $\frac{1}{4}m^3-\frac{3}{16}m^2a+\frac{3}{4}ma^2-a^3$

d) $-0{,}008x^3+0{,}12x^2-0{,}6x+1$

- **Actividad 21:** Factorizar los siguientes polinomios aplicando suma o diferencia de potencia de igual grado:

a) $27x^3+8$

b) a^7-128

c) $m^6 - 216$

d) $8x^3 - 1$

- **Actividad 19:** Factorizar los siguientes polinomios:

a) $6a^2x^2 + 9abx^2 + 3acx^2$

b) $6am + 4m + 15an + 10n$

c) $a^5 - a^2b + a^3 - b$

d) $a^4 + 2a^2b^2 + b^4$

e) $(a-b)^2 + 4(a-b) + 4$

f) $\frac{1}{a^2} + \frac{2}{ab} + \frac{1}{b^2}$

g) $16 - x^4$

h) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$

i) $9 - a^2 - 2ab - b^2$

j) $8 + 12x + 6x^2 + x^3$

k) $x^3 + 8$

Módulo 4

TRIGONOMETRÍA PLANA

"No hay un camino lógico que conduzca al camino de leyes elementales. El único camino es el de la intuición que nace del sentimiento de que tras las apariencias hay un orden"

ALBERT EINSTEIN

INTRODUCCIÓN

La Trigonometría fue desarrollada por los astrónomos griegos, quienes consideraban el firmamento como el interior de una esfera, por lo que fue natural que los triángulos sobre una esfera se estudiaran tempranamente (por Menelao de Alejandría alrededor del año 100 d. C.) y que los triángulos sobre un plano no se estudiaran hasta mucho después. El primer libro con un tratamiento sistemático de la trigonometría plana y esférica fue escrito por el astrónomo persa Nasir Ed-din (aproximadamente en el año 1250 d. C.).

A Regiomontano (1436-1476) se le atribuye haber llevado la Trigonometría del campo de la Astronomía al de la Matemática. Su trabajo fue mejorado por Copérnico (1473-1543) y por Retico (1514-1576), discípulo de Copérnico. El libro de Retico fue el primero en definir las seis funciones trigonométricas como relaciones entre los lados de un triángulo, aunque no fue ahí donde recibieron sus nombres actuales. El crédito por esto se le debe a Thomás Fincke (1583), aunque en su época no se aceptó universalmente la notación utilizada por él. La notación actual se estableció finalmente en los libros de texto de Leonard Euler (1707-1783).

La Trigonometría ha evolucionado desde entonces, de su uso por topógrafos, navegantes e ingenieros hasta las aplicaciones actuales en el estudio de las mareas oceánicas, el alza y la caída de la producción de alimentos en ciertos ambientes ecológicos, los patrones de ondas cerebrales y en muchos otros fenómenos.

OBJETIVOS

- Reconocer los distintos sistemas de medición angular.
- Resolver situaciones problemáticas cuyo planteamiento llevan a la resolución de triángulos rectángulos.

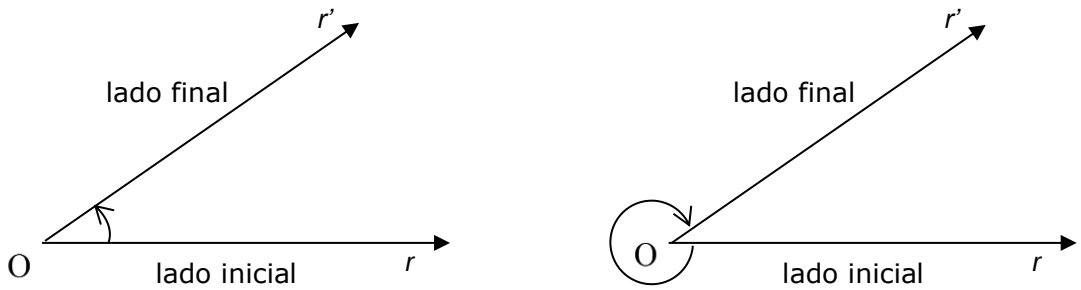
CONTENIDOS

1. Sistema de medición de ángulos. Equivalencia entre los tres sistemas.
2. Funciones Trigonométricas. Relación entre las funciones trigonométricas.
3. Circunferencia trigonométrica.
4. Resolución de triángulos rectángulos.
5. Expresiones algebraicas.

1. ÁNGULO. SISTEMAS DE MEDICIÓN

Ángulo

Consideremos un punto O del plano y una semirrecta que gira alrededor de él desde *una posición inicial* r *a una posición final* r' *. Se llama ángulo a la región del* plano comprendida entre ambas posiciones; llamadas lado inicial y lado final respectivamente.



Sistemas de medición de ángulos

Para medir ángulos se utilizan distintos sistemas de medición:

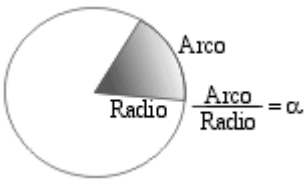
- **SEXAGESIMAL**: En este sistema, una circunferencia tiene 360° (360 grados sexagesimales). La **unidad de medida** es el **grado sexagesimal.**

  Un grado sexagesimal (°) tiene 60 minutos (’), un minuto tiene 60 segundos (”).

- **CENTESIMAL**: En este sistema una circunferencia tiene 400^G (400 grados centesimales). La **unidad de medida** es el **grado centesimal**.

  Un grado (^{G}) tiene 100 minutos (^{M}), un minuto tiene 100 segundos (^{S}).

- **RADIAL**: El sistema de medición de ángulos más utilizado es el sexagesimal. Cuando se quiso utilizar este sistema en Física, para poder calcular el camino desarrollado por alguna partícula en trayectoria circular, se encontró que el sistema sexagesimal no ayudaba, pues matemáticamente no está relacionado con el arco que describe el cuerpo al moverse. De esa manera se “inventó” otro sistema angular, el **sistema radial o circular**, donde la medida del ángulo se obtiene al dividir el arco y el radio de la circunferencia. En este sistema la **unidad de medida** es el **radián** (se simboliza rad)**.**Un ángulo llano (al dividir el arco por el radio) mide 3,14… (que es el valor aproximado de “π”). De esa manera un giro completo (que es lo mismo que dos ángulos llanos) mide 2π rad.



Equivalencia entre los tres sistemas:

De las definiciones dadas se desprende que

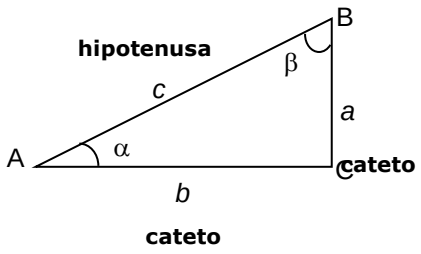
$$1\ giro = 2\pi\ rad = 360^o = 400^G$$
$$1\ llano = \pi\ rad = 180^o = 200^G$$
$$1\ recto = \frac{\pi}{2}\ rad = 90^o = 100^G$$

Ejemplos: Pasaje del sistema sexagesimal al circular y viceversa:
Cuando se desea pasar de un sistema a otro, se plantea y resuelve como un problema de regla de tres simple. Así:

¿Cuántos radianes son 30º?	¿Cuántos grados son $\frac{\pi}{4}$ radianes?
360º _____ 2π rad 30º _____ x rad $x = \frac{30^\circ \cdot 2\pi\ \text{rad}}{360^o} = \frac{\pi}{6}\ \text{rad}$	2π rad _____ 360º $\frac{\pi}{4}$ rad _____ xº $x = \frac{360^o \cdot \frac{\pi}{4}\ \text{rad}}{2\pi\ \text{rad}} = 45^o$

2. RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Previamente es importante recordar, los elementos de un triángulo rectángulo:

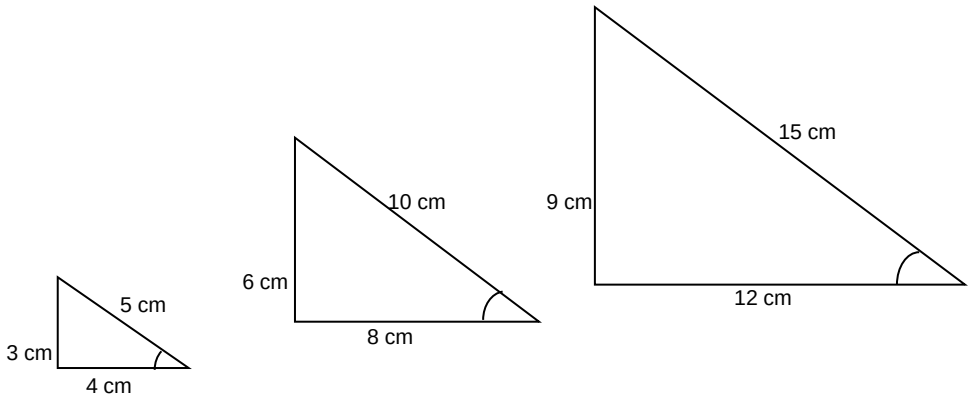
Catetos: son los lados que forman el ángulo recto. **Hipotenusa:** es el lado opuesto al ángulo recto.	

A partir de ello, dado un triángulo rectángulo ACB *como el de la figura anterior, se pueden formar seis razones con sus tres lados:*

$$\frac{a}{c}, \frac{b}{c}, \frac{a}{b}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{c}{a}$$

Resulta interesante analizar lo que ocurre con estas razones cuando varían los lados del triángulo.

Por ejemplo, si se construyen triángulos semejantes como los siguientes: uno de ellos cuyos catetos midan 3 cm y 4 cm respectivamente, y su hipotenusa 5 cm y los otros dos de tal manera que los catetos y la hipotenusa sean el doble y el triple (según corresponda) de los valores del primero, se puede observar que existe entre las longitudes de los lados una proporcionalidad. En efecto:



$$\frac{15\,cm}{5\,cm}=\frac{12\,cm}{4\,cm}=\frac{9\,cm}{3\,cm}=3\rightarrow \text{razón}$$

$$\frac{10\,cm}{5\,cm}=\frac{8\,cm}{4\,cm}=\frac{6\,cm}{3\,cm}=2\rightarrow \text{razón}$$

Esta proporcionalidad también puede escribirse respecto a los lados homólogos (es decir a aquellos que se ubican en la misma posición). En el ejemplo anterior resulta:

$$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}=\frac{3\,cm}{5\,cm}=\frac{6\,cm}{10\,cm}=\frac{9\,cm}{15cm}=0{,}6 \qquad \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}=\frac{5\,cm}{3\,cm}=\frac{10\,cm}{6\,cm}=\frac{15\,cm}{9\,cm}=1{,}\hat{6}$$

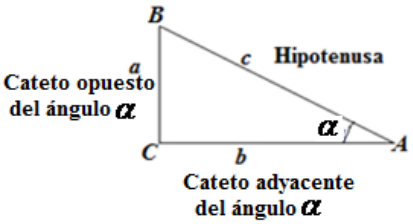
$$\frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}=\frac{4cm}{5\,cm}=\frac{8cm}{10\,cm}=\frac{12cm}{15\,cm}=0{,}8 \qquad \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}=\frac{5\,cm}{4\,cm}=\frac{10\,cm}{8\,cm}=\frac{15\,cm}{12\,cm}=1{,}25$$

$$\frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}=\frac{3\,cm}{4\,cm}=\frac{6\,cm}{8\,cm}=\frac{9\,cm}{12\,cm}=0{,}75 \qquad \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}=\frac{4\,cm}{3\,cm}=\frac{8\,cm}{6\,cm}=\frac{12\,cm}{9\,cm}=1{,}\hat{3}$$

Cada una de las razones arriba mencionadas se denomina razón trigonométrica de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo.

Las razones trigonométricas son: **seno, coseno, tangente, cotangente, secante** y **cosecante**, que se las denota como: **sen, cos, tg, ctg**, **sec** y **cosec** respectivamente.

En general, dado un triángulo rectángulo ACB como se muestra a continuación:



El seno de un ángulo es el número que expresa la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa (se refiere a su medida), es decir:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

De la misma forma se definen las restantes:

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c} \qquad \sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{c}{b}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b} \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{a}$$

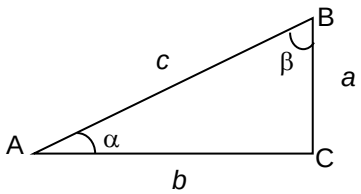
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{a}$$

Las tres últimas razones trigonométricas son las inversas de: la tangente, el coseno y el seno respectivamente

3. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

A partir de las razones trigonométricas estudiadas anteriormente y del Teorema de **Pitágoras** que se enuncia a continuación:

El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



$$c^2 = a^2 + b^2$$

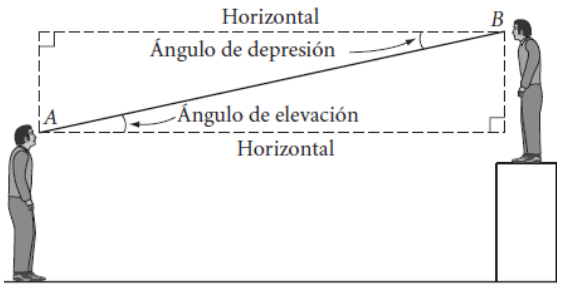
Para resolver un triángulo rectángulo (es decir hallar los elementos desconocidos en él, dados otros elementos), se siguen los siguientes pasos:

1º : Se dibuja un triángulo rectángulo y se designa con letras a sus elementos.
2º : Los datos se escriben sobre el propio triángulo.
3º : ¿Qué fórmulas, razón o razones trigonométricas relacionan los datos e incógnitas?
4º : Se escriben tales relaciones de las que resultará/n la/s incógnita/s.
5º : Se calcula el valor de la/s incógnita/s.
6º : Se discute la solución.
7º : Se comprueban los resultados.

La trigonometría de los triángulos rectángulos se utiliza frecuentemente para encontrar la altura de un objeto.

Si se mira hacia arriba, se mide el **ángulo de elevación**.

Si se mira hacia abajo, se mide el **ángulo de depresión**.



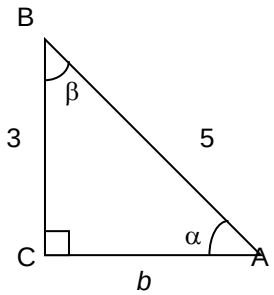
Recordemos las razones trigonométricas en un triángulo rectángulo:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa} \qquad \cos\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{hipotenusa} \qquad \text{tg}\,\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ adyacente}$$

$$\text{cosec}\,\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ opuesto} \qquad \sec\alpha = \frac{hipotenusa}{cateto\ adyacente} \qquad \text{ctg}\ \alpha = \frac{cateto\ adyacente}{cateto\ opuesto}$$

Las técnicas para la resolución de triángulos rectángulos pueden aplicarse para resolver diversas situaciones cotidianas de medición. En los siguientes ejemplos podrá apreciar algunas de estas aplicaciones.

Ejemplo: Dado el siguiente triángulo rectángulo:



Determinar el valor del lado b y de los ángulos α y β.

Por relación pitagórica sabemos que

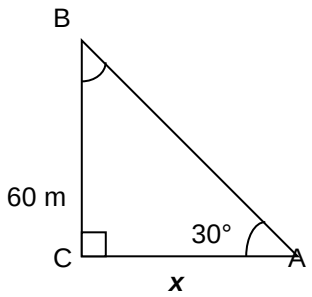
$$5^2 = 3^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$$

Por definición de razones trigonométricas, tenemos

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha = 36^{o}\,52'12''$$

Por ser α y β complementarios se verifica que $\beta = 90^{o} - \alpha = 53^{o}7'48''$

Ejemplo: Al mirar desde el suelo el punto más alto de una torre de 60 m. de altura, el ángulo que forma la visual y la horizontal es de 30º. ¿A qué distancia de la torre se encuentra el observador?



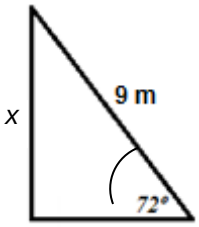
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

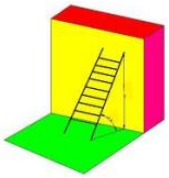
$$\operatorname{tg}\ 30° = \frac{60\,m}{x} \Rightarrow\ x = \frac{60\,m}{tg\ 30°} \Rightarrow x = 103{,}92\,m$$

Ejemplo: Una escalera de $9\,\text{m}$ está apoyada contra la pared; ¿qué altura alcanza si forma con el suelo, supuesto horizontal, un ángulo de 72^{o} ?

Solución:

Realizamos una figura de análisis.





La longitud de la hipotenusa está dada, y la distancia desconocida es la longitud del lado opuesto al ángulo de 72°. La razón que establece esta relación es la del seno.

$$\operatorname{sen}\ \alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$$

$$\operatorname{sen}\ 72^{o} = \frac{x}{9\,\text{m}}$$

$$x = 9\,\text{m} \cdot \operatorname{sen}\ 72^{o}$$

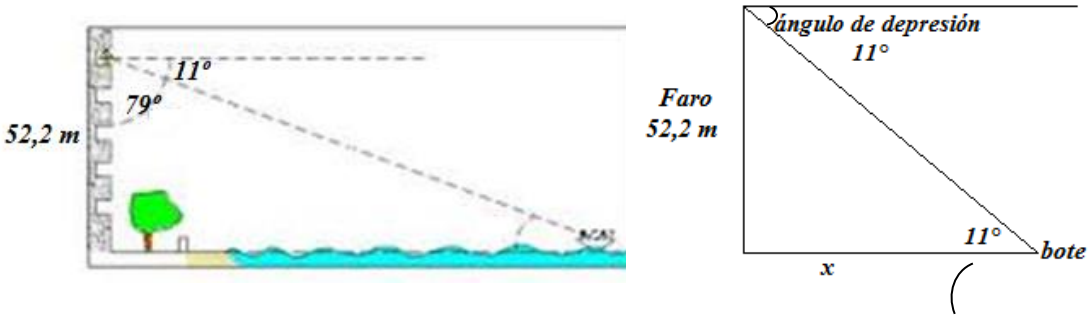
$$x \cong 8{,}6\,\text{m}$$

La altura que alcanza la escalera es aproximadamente $8{,}6\,\text{m}$

Ejemplo: Desde lo alto de un faro, cuya altura sobre el nivel del mar es de $52{,}2\ \text{m}$, el ángulo de depresión de un pequeño bote es de 11° ¿A qué distancia del faro está la embarcación?

Solución:

Lo primero que tenemos que hacer es dibujar el triángulo que se forma con los datos del problema para interpretar la situación.



Aunque el problema nos habla de un ángulo de depresión de 11°, el ángulo de elevación mide lo mismo (los ángulos de elevación y de depresión son congruentes, ya que son ángulos alternos internos entre rectas paralela y una transversal).

A partir de esto, con los datos de los lados, hacemos uso de la tangente trigonométrica:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\textit{cateto opuesto}}{\textit{cateto adyacente}}$$

$$\text{tg}\,11^{\text{o}} = \frac{52{,}2\ \text{m}}{x}$$

$$x = \frac{52{,}2\ \text{m}}{\text{tg}\,11^{\text{o}}}$$

$$x \cong 268{,}5\ \text{m}$$

Entonces la distancia del bote al faro es aproximadamente de $268{,}5\ \text{m}$

ACTIVIDADES

- **Actividad 1:** Completar la siguiente tabla.

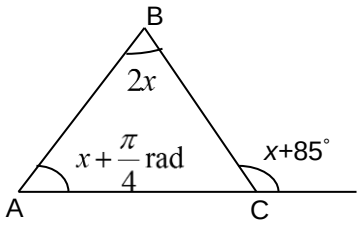
	Sexagesimal	**Radial**
α_1	225º23’	
α_2		$3\frac{\pi}{5}\,rad$
α_3	125º23’19”	
α_4		$\frac{\pi}{4}\,rad$

- **Actividad 2:** Dadas las medidas de tres ángulos, ordenarlos en forma creciente.
(Sugerencia: pasar los tres ángulos a un mismo sistema de medición)

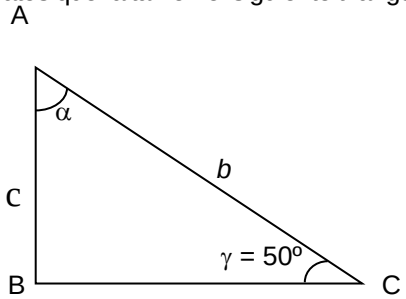
a) $\beta = \frac{5}{8}\pi\,rad$; γ = 148º 27’ 32” ; $\alpha = \frac{3}{2}\pi\,rad$

b)) $\beta = \frac{3}{4}\pi\,rad$; $\alpha = \frac{\pi}{2}\,rad$; γ = 95º 50’

- **Actividad 3:** Calcular los ángulos interiores del triángulo ABC, expresándolos en el sistema sexagesimal.



- **Actividad 4:** Calcular los datos que faltan en el siguiente triángulo rectángulo:

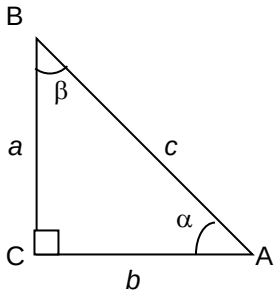


a = *8* cm

- **Actividad 5:** Hallar las razones trigonométricas de los ángulos agudos α y β de un triángulo rectángulo ACB, recto en C, sabiendo que el cateto adyacente al ángulo α mide 8 m y la hipotenusa mide $8\sqrt{2}$ m.

- **Actividad 6:** Completar la tabla utilizando únicamente los datos. (Usar la figura del triángulo rectángulo como referencia)

α	β	*a*	*b*	*c*
30º			15,2 cm	
		0,17m		0,20 m
	60º	5,5 cm		
			20 cm	25 cm



- **Actividad 7:** Plantear y resolver las siguientes situaciones problemáticas.

a) Si un observador de 1,70 m de altura, observa el extremo superior de un árbol, con un ángulo de elevación de 32º y la distancia del observador a la cúspide del mismo es de 8,7 m ¿Cuál es la altura del árbol?

b) Una torre de 130 m de altura está situada en la orilla de un lago. Desde la punta de la torre, el ángulo de depresión de un objeto en la orilla opuesta del lago es de 30º. ¿Cuál es el ancho del lago?

c) Una escalera de apoyo forma un ángulo de 60º con el piso y llega en la pared hasta una altura de 3 m. Averiguar la longitud de la misma.

d) ¿Cuál es la altura del árbol si proyecta una sombra de 10,89 m con un ángulo de elevación de 28º?

e) Si las diagonales de un rombo miden 6 cm y 0,8 dm respectivamente, calcular el perímetro y la amplitud de los ángulos interiores del mismo.

Bibliografía

- ✓ Vazquez de Tapia, Nelly. Tapia de Bibiloni, Alicia. Tapia, Carlos Alberto. “Matemática 3”. Editorial Estrada. Buenos Aires. Argentina. 1980.
- ✓ Vazquez de Tapia, Nelly. Tapia de Bibiloni, Alicia. Tapia, Carlos Alberto. “Matemática 4”. Editorial Estrada. Buenos Aires. Argentina. 1983.
- ✓ Dolciani, Mary. Berman, Simón. Wooton, William. “Álgebra Moderna y Trigonometría”. Publicaciones Cultural S.A. México, D.F.
- ✓ Arroyo; D; Berio; A; Colombo; M; D’Albano. “Matemática 3”.Editorial Puerto de Palos. Buenos Aires 2001.
- ✓ Berio; A; Colombo; M; D’Albano; C; Sardella; O. “Matemática 2”.Editorial Puerto de Palos. Buenos Aires 2001.
- ✓ Berio; A; Colombo; M; D’Albano; C; Sardella; O; Zapico; I. “Matemática 1”.Editorial Puerto de Palos. Buenos Aires 2001.
- ✓ Etchegoyen; S; Fagale; E; Rodríguez; S; Kalan; M; Alonso; M. “Matemática 1”.Editorial Kapeluz. Buenos Aires 1997.
- ✓ Fernández de Musomecci; D; Kempf de Gil; I; Mulki; L. “Matemática para ingresantes”. Editorial Magna. Tucuman 2001.
- ✓ Marchetti de De Simone; I; García de Turner; M. “ Matemática 4”. A-Z editora. Buenos Aires 1995.
- ✓ Marchetti de De Simone; I; García de Turner; M. “Matemática 5”. A-Z editora. Buenos Aires 1996.
- ✓ Stewart; J; Redlin; L; Watson; S. “Precálculo”. Editorial Thomson. México D.F. 2002.
- ✓ Chorny, Fernando; Caseres Pablo; Salpeter Claudio. “Matemática 4”. Editorial Estrada 2015.