UNCAUS
UNIVERSIDAD
NACIONAL DEL
CHACO AUSTRAL

Cursillo de Nivelación

en Matemática

FARMACIA

ÍNDICE

Módulo 1

CONJUNTOS NUMÉRICOS

"Uno aprende haciendo las cosas, porque aunque piense que lo sabe, no tendrá la certidumbre hasta que lo intente"

SÓFOCLES

INTRODUCCIÓN

A lo largo de la historia de la matemática, la introducción y aceptación de cada concepto matemático nuevo ha requerido por regla general, un periodo muy largo de adaptación. Ello es especialmente visible en las distintas acepciones del concepto de número. Este concepto surgió como consecuencia de la necesidad práctica de contar objetos.

El primer conjunto creado es el de los números naturales, que, era obviamente limitado. Pero la conciencia sobre la necesidad de ampliar el conjunto de números representó una importante etapa en el camino hacia la matemática moderna.

Paralelamente a la ampliación de los números se desarrolló su simbología y los sistemas de numeración, diferentes para cada civilización.

OBJETIVOS

- Identificar y resolver situaciones problemáticas en los distintos conjuntos numéricos, utilizando las definiciones y propiedades de las diferentes operaciones.
- Operar en los distintos conjuntos numéricos aplicando definiciones y propiedades.
- Aplicar la definición y las propiedades de los logaritmos.

CONTENIDOS

- ✓ Números naturales.
- ✓ Números enteros.
- ✓ Números racionales.
- ✓ Números irracionales.
- ✓ Números reales. Potenciación. Radicación en R. Racionalización. Logaritmación.

Números Naturales

Los números naturales surgen por la necesidad que el hombre tiene de contar.

1, 2, 3, 4,... reciben el nombre de **números naturales** y al conjunto de estos números se lo simboliza con N.

Entonces: $N = \{1,2,3,\ldots,n,n+1,\ldots\}$

Si a N se le incorpora el cero, recibe el nombre de **conjunto de números naturales ampliado** y se simboliza: $N_0 = \{0,1,2,3,\ldots,n,n+1,\ldots\}$ Es decir $N_0 = N \cup \{0\}$

Números Enteros

Para que la resta sea siempre posible se crea el conjunto de los números negativos.

El conjunto formado por los números naturales o enteros positivos, el cero y los enteros negativos se denomina **conjunto de números enteros** y se designa con Z, que es una ampliación de los números naturales.

Es decir:

$$Z = N \cup \{0\} \cup \{\ldots,-3,-2,-1\} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,+1,+2,+3,\ldots\} = \{\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots\}$$

Un número entero queda definido por un número natural y un signo.

Ejemplo: $+5$; -5

El número natural se llama **valor absoluto** del número entero.

$+5$ y -5 tienen el mismo valor absoluto y distinto signo

Los representamos así:

$|+5| = 5$ se lee "valor absoluto" de $+5$ es igual a 5.

$|-5| = 5$ se lee "valor absoluto" de -5 es igual a 5

Dos números del mismo valor absoluto y distinto signo se dicen **opuestos**.

OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS

El conjunto de los números enteros es **cerrado** con respecto a las operaciones adición, multiplicación y sustracción.

Adición

Si los números tienen el **mismo signo** (son los dos positivos o los dos negativos), sumamos sus valores absolutos y a la suma le colocamos el signo que tienen los sumandos

Ejemplos: $-4-6=-10$ $\quad$ $+4+6=+10$

Si dos sumandos tienen distinto signo, al de mayor valor absoluto le restamos el de menor valor absoluto, y al resultado, le colocamos el signo que tiene el sumando de mayor valor absoluto.

Ejemplos:

$$-6+2=-4 \qquad +6-2=+4$$

Diferencia

Restar a-b, no es otra cosa que sumarle al entero *a* el opuesto del entero *b*, es decir, calcular la suma $a+(-b)$.

Ejemplos:

$5-2=5+(-2)=3$ $\qquad$ $-2-(-5)=-2+5=3$

$2-5=2+(-5)=-3$ $\qquad$ $-5-(-2)=-5+2=-3$

Producto

Al multiplicar **dos factores de igual signo** (los dos positivos o los dos negativos) el resultado es positivo e igual al producto de sus valores absolutos.

Ejemplos:

$$(+5).(+6)=+30 \quad , \quad (-5).(-6)=+30$$

Si los dos factores tienen **distinto signo** (uno es positivo y el otro negativo), el resultado de su multiplicación es negativo con valor absoluto igual al producto de los valores absolutos de los factores.

Ejemplos:

$$(-5).(+6)=-30 \quad , \quad (+5).(-6)=-30$$

Se puede considerar en esta operación la regla de los signos:

REGLA DE LOS SIGNOS

+	.	+	=	+
+	.	−	=	−
−	.	+	=	−
−	.	−	=	+

En el caso que haya un producto de varios factores, se coloca el signo de acuerdo a la regla de los signos y se multiplican los valores absolutos de los números dados.

$$(-5)(+3)(+2)(-2)(-5)(-4)=+1200$$

Cociente

Para dividir números enteros, dividimos sus valores absolutos y al cociente le colocamos el signo que le corresponde, según la "regla de los signos".

La "regla de los signos" es análoga a la del producto.

Ejemplos:

$$(+30):(+6)=+5 \quad , \quad (-30):(-6)=+5$$

$$(-30):(+6)=-5 \quad , \quad (+30):(-6)=-5$$

Números Racionales

Un número racional se puede definir como el cociente entre dos números enteros a y b con $b \neq 0$. Este cociente se indica $a{:}b$ o como fracción:

$$\frac{a}{b} \quad \begin{matrix} \rightarrow \text{numerador} \\ \rightarrow \text{denominador} \end{matrix}$$

Al conjunto de estos números lo representamos con Q.

Observaciones:

1- Todo número entero "a" es un número racional con denominador igual a 1.

Ejemplos:

a) $5=\dfrac{5}{1}$ b) $-11=-\dfrac{11}{1}$

2- Todo número racional en el cual el numerador es múltiplo del denominador es un número entero.

Ejemplos:

a) $\dfrac{14}{2}=7$ b) $-\dfrac{25}{5}=-5$

3- No todo número racional es un número entero.

Ejemplos:

$$\frac{3}{2} \in Q \quad \text{y} \quad \frac{3}{2} \notin Z$$

Estos números se llaman **fraccionarios puros**, y se los denota con F. Es decir, los números fraccionaros puros son aquellos que pueden escribirse como el cociente de dos números enteros distintos de cero, tal que el dividendo no sea múltiplo del divisor.

De las observaciones **1, 2** y **3** concluimos que el conjunto de los **números racionales** Q es el conjunto formado por los **números enteros** y los **números fraccionarios puros**, es decir:

$$Q = Z \cup F$$

4- A los **números racionales** se los suele expresar **como números decimales** o **expresiones decimales, exactas** o **periódicas**.

Ejemplos:

a) $\frac{9}{10} = 0{,}9$ b) $\frac{4}{3} = 1{,}33... = 1{,}\overset{\frown}{3}$ c) $\frac{1}{6} = 0{,}1666... = 0{,}1\overset{\frown}{6}$

La expresión a) es una **expresión exacta** porque tiene una cantidad finita de cifras decimales.

Las expresiones b) y c) son **periódicas** porque los números 3 y 6 se repiten indefinidamente. A los números que se repiten indefinidamente se los llama período y se los señala con un arquito.

Las **expresiones periódicas** a su vez se clasifican en **puras** y **mixtas**.

Expresiones periódicas puras: en éstas el período aparece inmediatamente después de la coma como en la expresión b).

En las **expresiones periódicas mixtas**, hay una parte no periódica después de la coma y luego aparece el período, como en la expresión c).

Números irracionales

El conjunto de los **números racionales** es un **conjunto denso** pues entre dos racionales cualquiera, existen infinitos racionales. Sin embargo, los números racionales no abarcan la totalidad de los números ni son suficientes para la resolución de ciertos problemas de aritmética. Existen números que no pueden representarse como el cociente $\frac{a}{b}$ con a y $b \in Z$ y $b \neq 0$, o sea, no son racionales. Estos números se pueden escribir como una **expresión decimal de infinitas cifras no periódicas** y se llaman **números irracionales**. El conjunto de los números irracionales se designa con I.

Los números irracionales generalmente provienen de raíces que en Q no son exactas

(Ejemplos: $\sqrt{2}, \sqrt{3}$).

Existen otros números irracionales como π y e que no provienen de raíces.

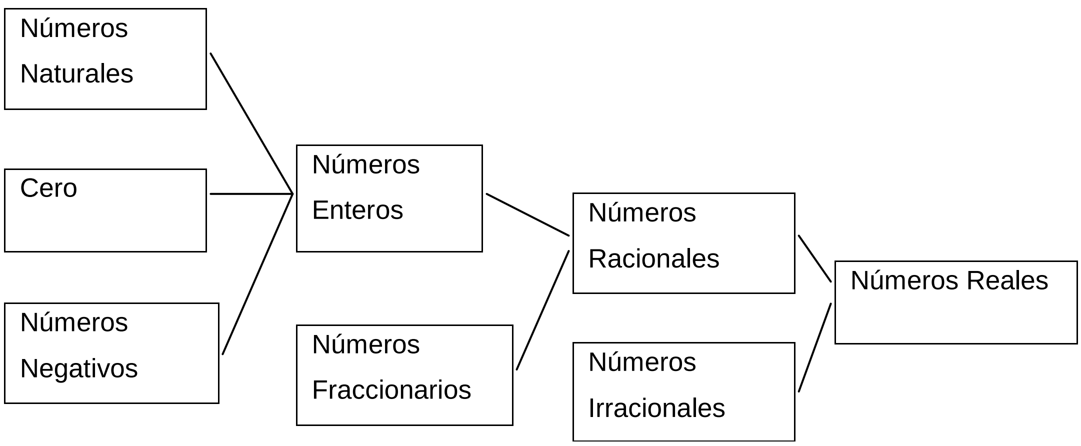
Números Reales

Con R se designa el conjunto de **números reales**. Éstos se pueden considerar como la unión de los **números racionales** con los **números irracionales**. Entonces

$$R = Q \cup I$$

El conjunto R es **denso**, y además es **continuo**.

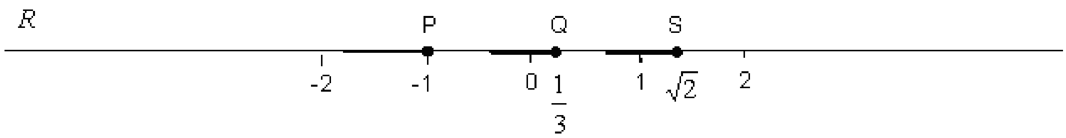
<u>Sintetizando</u>:



Representación geométrica de los números reales

Dada una recta *R,* se elige en ella un punto origen al que se le hace corresponder el número cero y una unidad de medida. Se establece una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números reales y el conjunto de los puntos de la recta *R*, es decir:
"A todo número real le corresponde un punto en la recta y a todo punto de la recta le corresponde un número real".

De esta manera, por ejemplo, los números $-1, \frac{1}{3}, \sqrt{2}$ quedan representados por los puntos P, Q y S respectivamente, como se muestra en el siguiente gráfico:



Operaciones con números reales

En R se definen básicamente dos operaciones: la adición y el producto.

Propiedades de las operaciones de adición y producto

1. **Propiedad asociativa de la adición**: $(a+b)+c = a+(b+c)$.

2. **Propiedad asociativa de la multiplicación:** $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

3. **Propiedad conmutativa de la adición:** $a+b = b+a$ **.**

4. **Propiedad conmutativa de la multiplicación:** $a \cdot b = b \cdot a$ **.**

5. **Propiedad del neutro aditivo:** Existe un único número 0 tal que $a+0 = 0+a = a$

6. **Propiedad del neutro multiplicativo:** Existe un único número 1 tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

7. **Propiedad del opuesto aditivo:** Para todo número real *a* existe un único número real, **-a**, tal que $a+(-a) = (-a)+a = 0$

8. **Propiedad del inverso multiplicativo:** Para todo número real *a* distinto de cero, existe un único número real $\frac{1}{a}$ tal que $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

9. **Propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la adición**

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \qquad\qquad (b+c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$$

POTENCIACIÓN

Definición de potencia de exponente natural

Una **potencia** es un símbolo que expresa una multiplicación en la que todos los factores son iguales.

En general, para cualquier número real a y cualquier $n \in N$, el símbolo a^n representa el producto de n factores, cada uno de ellos igual a a.

$$\underbrace{a.a.a...a.a}_{n\text{ factores}} = \underbrace{a}_{base}{}^{n \to \text{exponente}}$$

El símbolo a^n se lee: “la n-ésima potencia de a”, “a (elevada) a la n-ésima potencia” o simplemente “a a la n”.

Si el exponente n es 1, usualmente se omite, así a^1 se escribe: a.

Ejemplos:

a) $\left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{3}{2}.\frac{3}{2} = \frac{9}{4}$

b) $(-5)^2 = (-5).(-5) = +25$

De la definición y de los ejemplos presentados, observamos que:

i) Si el exponente es par y la base de la potencia es positiva o negativa entonces el resultado conserva es positivo.

ii) Si el exponente es impar y la base de la potencia es positiva o negativa entonces el resultado conserva el signo de la base.

Potencia de exponente entero

Para el caso en que el exponente sea cero o entero negativo, tendremos:

* $a^m.a^n = a^{m+n}$.

* $a^0.a^n = a^{0+n}$

* $a^0.a^n = a^n$

* $a^0 = 1, \quad si\ a \neq 0$ con $a \neq 0$ para evitar la **expresión indefinida** 0^0

* $a^{-n}.a^n = a^{-n+n} = a^0 = 1$

* $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, $a \neq 0$ para evitar la **expresión indefinida** $\frac{1}{0}$.

Potencia de exponente racional

Se amplía la definición de potencia para el caso de exponente racional.

Para cualquier número real no negativo y para m y n enteros positivos se cumple:

i) $a^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{a^n}$

ii) $a^{-\frac{n}{m}} = \left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{n}{m}} = \frac{1}{\sqrt[m]{a^n}}$ si $a \neq 0$

En el caso que el radicando sea negativo, solo existe $a^{\frac{n}{m}}$ si m es impar.

Ejemplos:

a) $0{,}125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{0{,}125} = 0{,}5$

b) $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \left(\sqrt[4]{16}\right)^3 = 2^3 = 8$

c) $4^{0,25} = 4^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{4} = \sqrt[4]{2^2} = \sqrt{2}$

d) $\left(-64\right)^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\left(-64\right)^2}}=\dfrac{1}{\left(\sqrt[3]{-64}\right)^2}=\dfrac{1}{\left(-4\right)^2}=\dfrac{1}{16}$

Propiedades de la potenciación

1. Producto de potencias de igual base: El producto de potencia de igual base es otra potencia cuya base es la misma y cuyo exponente es la suma de los exponentes dados. Es decir, si $a\in R$ y $m,n\in R$, entonces:

$$\boxed{a^m\cdot a^n=a^{m+n}}$$

Recíprocamente, si $a\in R$ y $m,n\in R$: $a^{m+n}=a^m.a^n$

<u>Ejemplo</u>: $5^3.5^4=5^{3+4}=5^7$

2. Cociente de potencias de igual base: El cociente de potencias de igual base (no nula) es otra potencia cuya base es la misma y cuyo exponente es la diferencia de los exponentes dados. Es decir, si $a\in R; a\neq 0;$ $m,n\in R,$ $m>n$ entonces:

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}}$$

Recíprocamente, si $a\in R;$ $a\neq 0$ y $m,n\in R, m>n:$ $a^{m-n}=\dfrac{a^m}{a^n}$

<u>Ejemplo</u>: $\dfrac{2^8}{2^5}=2^{8-5}=2^3$

3. Potencia de potencia: La potencia de potencia es otra potencia cuya base es la misma y cuyo exponente es el producto de los exponentes dados. Es decir, si $a\in R$ y $m,n\in R$, entonces

$$\boxed{\left(a^m\right)^n=a^{m\cdot n}}$$

Recíprocamente, si $a\in R;$ y $m,n\in R:$ $a^{m.n}=\left(a^m\right)^n$

<u>Ejemplo</u>: $\left(2^3\right)^4=2^{3.4}=2^{12}$

4. La potencia de un producto: la potencia de un producto es igual al producto de las potencias de cada uno de los factores. Es decir, si $a,b\in R; n\in N$, entonces

$$\boxed{\left(a\cdot b\right)^n=a^n\cdot b^n}$$

Recíprocamente, si $a,b\in R$ y $n\in R:$ $a^n.b^n=\left(a.b\right)^n$

5. La potencia de un cociente: La potencia de un cociente (con denominador no nulo) es igual a la potencia del numerador dividida por la potencia del denominador. Es decir, si $a,b \in R; b \neq 0; n \in N,$ entonces

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$$

Recíprocamente, si $a,b \in R$; $b \neq 0$ y $n \in R$: $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$

Nota: La potenciación **no es distributiva** respecto a la **suma** y a la **resta**. $(a \pm b)^n \neq a^n \pm b^n$

RADICACIÓN

Dado un número real a y un entero positivo n, se llama raíz n-ésima de a a otro número real b tal que b elevado a n es igual a a. Es decir,

$$\forall a,b \in R,\ \forall n \in N;\ \sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

En $\sqrt[n]{a}$, n es el índice, a es el radicando y $\sqrt{\ }$ es el signo radical.

Cuando el índice n es **par**, un número positivo a tendrá dos raíces n-ésimas reales, una positiva y otra negativa. La raíz positiva es llamada **raíz principal** o **raíz aritmética**. Por ejemplo, puesto que $5^2 = 25$ y $(-5)^2 = 25$. Pero 5, que es la raíz positiva, es llamada raíz principal de 25. Así, cuando n es par, el símbolo $\sqrt[n]{\ }$ denota la raíz n-ésima principal (positiva).

Cuando el índice n es **impar**, un número real tiene únicamente una raíz n-ésima real. Por ejemplo $\sqrt[3]{-1000} = -10$ porque –10 es el (único) número real ya que $(-10)^3 = -1000$elevado a la tercera potencia es –1000.

Número y naturaleza de las raíces n-ésimas reales de b

Para	b>0	b<0	b=0
n par	Una raíz positiva y Una raíz negativa	Ninguna raíz real	Una raíz real, igual 0
n impar	Una raíz positiva	Una raíz negativa	Una raíz real, igual 0

$\sqrt[n]{b}$, se llama radical y se lee, "la raíz *n*-ésima principal de b" o, simplemente, "la raíz *n*-ésima de b" y designa:

1. La raíz *n*-ésima no negativa de b si n es par y $b \geq 0$. En este caso $-\sqrt[n]{b}$ representa la raíz *n*-ésima negativa de b, si $b \neq 0$.

   Ejemplos: $\sqrt{36} = 6,\qquad -\sqrt[4]{81} = -3,\qquad \sqrt[4]{0} = 0$

2. La raíz *n*-ésima real única de b si n es impar.

   Ejemplos: $\sqrt[3]{-125} = -5,\qquad \sqrt[5]{32} = 2$

   Si n es par y $b<0$, no se le asigna ningún significado al símbolo $\sqrt[n]{b}$ en el sistema de los números reales. Por ejemplo, $\sqrt[6]{-64}$ no está definida en el sistema de los números reales.

   Nota: cuando $\sqrt[n]{b}$ es un número real, su definición implica que $\left(\sqrt[n]{b}\right)^n = b$. ¿Podemos simplificar $\sqrt[n]{b^n}$? Si n es un entero positivo impar, $\sqrt[n]{b^n} = b$; por ejemplo, $\sqrt[3]{2^3} = 2$ y $\sqrt[3]{(-4)^3} = -4$.

   Pero, si n es un entero positivo par, $\sqrt[n]{b^n} = |b|$, porque los radicales con índice par designan números no negativos; por ejemplo $\sqrt[4]{2^4} = 2$ y $\sqrt[4]{(-2)^4} = |-2| = 2$.

Propiedades de la radicación

$\forall a, b \in R;\ \forall m, n \in \mathrm{N}$ y con la condición de que si m y n son números pares entonces $a \geq 0$ y $b \geq 0$, valen las siguientes propiedades:

1) $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

2) $\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$

3) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}}$, $p \in N$

4) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n:p]{a^{m:p}}$, $p \in N,\ p \neq 0$

5) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$

La propiedad 3) se utiliza para reducir radicales a **mínimo común índice**, y la 4) para **simplificar radicales**.

$$\sqrt[n]{a \pm b} \neq \sqrt[n]{a} \pm \sqrt[n]{b}$$

RACIONALIZACIÓN DE DENOMINADORES

Consiste en eliminar las raíces que puedan aparecer en el denominador. Se presentan las siguientes situaciones:

- **Que el denominador sea una raíz cuadrada**: en este caso se multiplica numerador y denominador por la misma raíz.

Ejemplo: $\dfrac{5}{\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}.\sqrt{2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

- **Que el denominador no sea una raíz cuadrada:** en este caso se multiplica numerador y denominador por una raíz del mismo índice que la del denominador, pero con un radicando elevado a un exponente que sea la diferencia entre el índice y el exponente.

Ejemplo: $\dfrac{5}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{5\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2}.\sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{5\sqrt[3]{4}}{2}$

- **Que el denominador sea un binomio con raíces cuadradas**: en este caso se multiplica numerador y denominador por el **conjugado del denominador**.

Ejemplo: $\dfrac{2}{5-\sqrt{3}} = \dfrac{2.(5+\sqrt{3})}{(5-\sqrt{3}).(5+\sqrt{3})} = \dfrac{10+2\sqrt{3}}{25-3} = \dfrac{10+2\sqrt{3}}{22} = \dfrac{10}{22} + \dfrac{2\sqrt{3}}{22} = \dfrac{5}{11} + \dfrac{\sqrt{3}}{11}$

LOGARITMACIÓN

La operación inversa de la potenciación que consiste en calcular el exponente conociendo la potencia y la base se llama **logaritmación.**

Si a y b son dos números reales positivos, siendo $b \neq 1$, existe un único número c tal que $b^c = a$

Este número c se llama ***logaritmo en base b del número a*** y se indica: $\boxed{\log_b a = c}$

Luego $\boxed{\log_b a = c \Leftrightarrow b^c = a}$

Ejemplos:

a) $\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$

b) $\log_3 \dfrac{1}{9} = -2$ porque $3^{-2} = \dfrac{1}{9}$

Propiedades

1. $\log_b 1 = 0$ porque $b^0 = 1$

2. $\log_b b = 1$ porque $b^1 = b$

3. $\log_b (r.s) = \log_b r + \log_b s$

4. $\log_b (r:s) = \log_b r - \log_b s$

5. $\log_b a^n = n \log_b a$

6. $\log_b \sqrt[n]{a} = \dfrac{\log_b a}{n}$

De las propiedades anteriores se deducen las dos propiedades siguientes:

a) $\log_b a = \log_{b^n} a^n$ si $n \neq 0$

b) $b^{\log_b P} = P$

Se llaman logaritmos decimales o de Briggs, a los logaritmos de base 10. Se indica:

$$\boxed{\log_{10} a = \log a}$$

Se llaman **logaritmos naturales o** neperianos **a los logaritmos de base e, donde** e **es el número irracional cuyas primeras cifras son** 2,71828... **y se indica:**

$$\boxed{\log_e a = \ln a}$$

Cambio de Base

Conociendo el logaritmo de un número en una base determinada podemos obtener el logaritmo de dicho número en cualquier otra base, aplicando la siguiente fórmula:

$$\log_c a = \frac{\log_b a}{\log_b c}$$

Ejemplo: Calcular $\log_4 100$, sabiendo que el $\log 4 \cong 0{,}6$

$$\log_4 100 = \frac{\log 100}{\log 4} \cong \frac{2}{0{,}6} \Rightarrow \log_4 100 \cong 3{,}33\ldots$$

ACTIVIDADES

- **Actividad 1:** Determinar si cada afirmación es verdadera o falsa (Tachar lo que no corresponda)

a) $3.(8+4)=24+12$	V	F
b) $3.(8.4)=24.12=288$	V	F
c) $16a+a=(16+1).a=17a$	V	F
d) $(4+a).3=4+3.a$	V	F
e) El opuesto de –5 es 5.	V	F
f) El inverso de –5 es $-\frac{1}{5}$.	V	F

- **Actividad 2:** Resolver las siguientes operaciones.

a) $-\{-2+[9-(6-2)]+7-[4-(-7+5)-1]+9\}=$

b) $(21:3+2):3-[4\cdot(3-9)]=$

c) $-2+\frac{5}{3}:\frac{25}{9}-\frac{8}{3}+\frac{75}{12}.\frac{6}{25}=$

d) $\frac{4}{5}-\left\{-\left[-\left(-\frac{1}{2}+1\right)\right]+\left[\left(-\frac{3}{5}+1\right)+\frac{3}{2}\right]+\frac{4}{5}\right\}=$

e) $\dfrac{1-\dfrac{1}{1-2^{-2}}}{1-\dfrac{1}{1-2^{-4}}}=$

- **Actividad 3:** Evaluar las siguientes expresiones si $x=5$, $y=-8$ y $z=10$:

a) $-(-z)$ b) $\{[(x+y)z]+x\}+yz$

- **Actividad 4:** Indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda.

a) $3^2\cdot 3^4=3^8$ b) $(5^2)^2=5^4$ c) $(-1)^0=-1$

d) $3^4+3^5=3^9$ e) $2^3\cdot 5^4=10^7$ f) $(-3)^4=-3^4$

- **Actividad 5:** Simplificar la expresión de tal manera que *x, y* y *z* aparezcan a lo sumo una vez y de tal manera que no haya exponentes negativos, con $x \neq 0, y \neq 0$ y $z \neq 0$

a) $\dfrac{(2x^2y)^2}{xy^3z^2}$ b) $\dfrac{(4x^3z^{-1})^2}{(x^2yz^{-3})^{-1}}$

- **Actividad 6:** La resistencia total, R, de cierto circuito serie-paralelo está definida como

$$\mathrm{R} = \left(\frac{1}{\mathrm{R}_1} + \frac{1}{\mathrm{R}_2}\right)^{-1} + \mathrm{R}_3$$

Determinar R cuando $\mathrm{R}_1 = 0{,}8\Omega, \mathrm{R}_2 = 0{,}45\Omega$ y $\mathrm{R}_3 = 0{,}76\Omega$.

- **Actividad 7:** Simplificar los siguientes radicales

a) $\sqrt[3]{27x^6b^9}$ b) $\sqrt[8]{\dfrac{64a^{14}}{9c^8}}$

- **Actividad 8:** Extraer factores del signo radical

a) $\sqrt[3]{x^5y^3}$ b) $\sqrt[4]{\dfrac{48}{5}x^9y^5z^4}$

- **Actividad 9:** Indicar V o F. Justificar introduciendo factores

a) $\sqrt[3]{128ab^3} = 4b\sqrt[3]{2a}$ .... b) $\sqrt{\dfrac{x^4y}{27}} = \dfrac{1}{3}x^3\sqrt{\dfrac{y}{3}}$ ....

c) $\sqrt[5]{\dfrac{64}{9}x^{10}z^2a^{23}} = 2x^2a^4\sqrt[5]{\dfrac{2}{9}z^2a^3}$ .... d) $\sqrt[3]{a^4 - b^4} = (a-b)\sqrt[3]{a-b}$ ....

- **Actividad 10:** Racionalizar denominadores, haciendo las salvedades correspondientes.

a) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$ b) $\dfrac{3}{\sqrt{8}}$ c) $\dfrac{a}{2\sqrt[3]{b^2}}$

d) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ e) $\dfrac{2}{-1+\sqrt{5}}$

- **Actividad 11:** Completar aplicando la definición de logaritmo

a) $\log_2 16 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ porque $2^{\ldots\ldots\ldots} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

b) $\log_{\frac{1}{3}} 27 = \ldots\ldots\ldots\ldots$ porque ....

c) $\log_{25} \frac{1}{5} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ porque ....

d) $\log_{\frac{4}{3}} \frac{9}{16} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ porque ....

e) $\log_5 \sqrt[3]{5} = \ldots\ldots\ldots\ldots$ porque ....

- **Actividad 12:** Calcular las siguientes expresiones, aplicando las propiedades de logaritmación

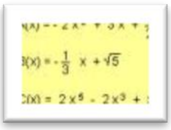
a) $\log_2 (16.8)$ b) $\log_3 (27:3)$ c) $\log_2 4^3$

d) $\log_2 \sqrt[3]{2^4.16}$ e) $\ln e^3 + \ln e^{-2}$

- **Actividad 13:** En electrónica la ganancia o pérdida de potencia puede determinarse con la fórmula

$$N = 20(\log I_1 - \log I_2) + 10(\log R_1 - \log R_2)$$

Simplificar esta fórmula.



Módulo 2

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

“No hay rama de la Matemática, por abstracta que sea, que no pueda aplicarse algún día al fenómeno del mundo real”

NICOLAI LOBACHEVSKY

INTRODUCCIÓN

Los matemáticos pasaron de la aritmética (que se ocupa de los números concretos) al álgebra cuando se interesaron en las operaciones que podían realizarse con cualquier número, al que representaban con una letra.

En un principio, las operaciones se describían con muchas palabras, era la época del álgebra retórica. Más tarde, comenzó la etapa del álgebra sincopada, es decir, abreviada y en el siglo XVI comenzó la etapa del álgebra simbólica, que es la que utilizamos hoy, en la que asignamos una letra a cada incógnita y también a los números, cuando no son números concretos.

OBJETIVOS

- Clasificar expresiones algebraicas
- Operar con polinomios
- Factorizar polinomios aplicando los diferentes casos
- Presentar las expresiones algebraicas fraccionarias
- Realizar operaciones con expresiones algebraicas fraccionarias

CONTENIDOS

- ✓ Expresiones algebraicas
- ✓ Polinomios en una variable
- ✓ Operaciones con polinomios
- ✓ Factorización de polinomios
- ✓ Expresiones algebraicas racionales fraccionarias.

EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Se llama **expresión algebraica** a toda combinación de números y letras vinculados por las operaciones de suma, resta, multiplicación, división, potenciación y radicación.

Ejemplos: a) $2x+5y-z$ b) $5x^2-3x^{-1}+\dfrac{7}{\sqrt{y}}$

Expresiones Algebraicas

Expresión Algebraica Racional

Son aquellas en que las variables están afectadas únicamente por las operaciones de suma, resta, multiplicación división y potenciación con exponentes enteros.

Expresión Algebraica Racional

Son expresiones en que las variables están relacionadas con las operaciones de suma, resta y multiplicación. Si hay potencias, estas van con exponentes naturales o iguales a cero.

Ejemplo:

$x^2+6xy+\sqrt{2}y^3$

Expresión Algebraica Racional Fraccionaria

Son expresiones en que alguna de las variables forma parte de un divisor o figura en el numerador con exponente negativo.

Ejemplo:

$9a-3a^{-2}m$

Expresión Algebraica Irracional

Son aquellas en las que alguna de sus variables están afectadas por radicales o exponentes fraccionarios.

Ejemplos:

a) $5x-\dfrac{3}{2}\sqrt{y}$

b) $\dfrac{7}{3}m^2a^{\frac{3}{4}}$

POLINOMIO

Definición: Se llama polinomio a toda expresión algebraica racional entera.

Ejemplo: $-3x^4 + \sqrt{5}xy + \frac{2}{3}x^2z^4$

De acuerdo a la cantidad de términos que poseen los polinomios algunos reciben nombres especiales:

monomio $\rightarrow$ 1 término

binomio $\rightarrow$ 2 términos

trinomio $\rightarrow$ 3 términos

cuatrinomio $\rightarrow$ 4 términos

Observar que cada término (o sumando) de un polinomio es un monomio y está formado por una **parte numérica** llamada **coeficiente** y una **parte literal**.

Ejemplo:

$\sqrt{5}xy^3$: donde $\sqrt{5}$ se llama coeficiente y es la parte numérica; x e y se llaman variables o indeterminadas y es la parte literal.

Importante:

- El **grado de un monomio** es la suma de los exponentes de las letras (o variables) que contiene.
- El **grado de un polinomio** es el grado del monomio de mayor grado que participa en él.
- Un **polinomio es homogéneo** cuando todos sus términos son del mismo grado.

Nota: trabajaremos con polinomios en una sola variable.

POLINOMIO EN UNA VARIABLE

Se llama **polinomio de grado n en la variable (o indeterminada)** x, sobre el conjunto de los números reales, a toda expresión de la forma:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \text{ con } a_n \neq 0 \text{ y } n \text{ entero no negativo}$$

siendo $a_0, a_1, a_2, \cdots, a_n$ números reales llamados coeficientes.

Notación:

- A los polinomios en la variable x se los simboliza con letras mayúsculas indicando la indeterminada entre paréntesis: $P(x);\ Q(x);\ T(x)$
- A a_0 se lo llama **término independiente** y a a_n se lo denomina **coeficiente principal.**

Ejemplos**:** Determinar el grado de los siguientes polinomios.

a) $P(x) = 5x^4 + 3x^3 + 1$ es un polinomio de grado 4

b) $Q(x) = 2x - 1$ es un polinomio de primer grado

c) $R(x) = 7$ es un polinomio de grado 0

POLINOMIOS ESPECIALES

* **Polinomio nulo:** Polinomio es aquel que tiene todos los coeficientes iguales a cero.

En símbolos: $P(x) = 0 + 0x + ... + 0x^n$ $\qquad P(x) = 0$

El polinomio nulo **carece de grado**.

* **Polinomio opuesto:** Dos polinomios son opuestos cuando los coeficientes de los términos de igual grado son números opuestos.

Ejemplo: Sea $P(x) = 2x^2 + 7x - 45$ el polinomio opuesto es $P(x) = -2x^2 - 7x + 45$

***Polinomio constante:** Se llama polinomio constante a todo polinomio de grado cero.

Ejemplo: $P(x) = -\dfrac{2}{3}$

En particular $P(x) = 1$ se llama Polinomio Identidad y se lo simboliza generalmente como $I(x)$

Igualdad de polinomios

Dos polinomios no nulos, son iguales si y sólo si los coeficientes de los términos de igual grado son iguales (a los términos de igual grado se los denomina ***términos semejantes***).

Ejemplo: $P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$ $\qquad Q(x) = 2 + 3x^2$

$P = Q$ si y sólo si $a_0 = 2,\ a_1 = 0$ y $a_2 = 3$

Polinomios completos y ordenados:

Un polinomio en la variable x se dice que está **completo y ordenado**, cuando figuran todas las potencias de x menores al grado del polinomio y los términos están ordenados según éstas potencias en forma creciente o decreciente.

Los polinomios se completan, agregando los términos que faltan con coeficiente cero.

Ejemplos:

a) $P(x)=3x^2+2x-1$ está completo y ordenado en forma decreciente

b) $Q(x)=-x^3+4x-3$ está incompleto ya que falta el término de grado 2.

Para completarlo se agrega ese término con coeficiente cero, quedando:

$$Q(x)=-x^3+0x^2+4x-3$$

El valor numérico de un polinomio $P(x)$ es el número real que resulta al reemplazar la variable x por un número determinado y efectuar las operaciones que están indicadas.

Ejemplo:

El valor numérico de $P(x)=2x^3-x+3$ para $x=-1$ es:

$$P(-1)=2(-1)^3-(-1)+3=2(-1)+1+3=2$$

OPERACIONES CON POLINOMIOS

ADICIÓN DE POLINOMIOS: La suma de dos o más polinomios es otro polinomio cuyos términos se obtienen sumando los términos de igual grado.

Ejemplo:

Dados los polinomios: $P(x)=-3x^4+6x^3-2x+4$ y $Q(x)=2x^3-3x^2+5x-2$.

Realizar $P(x)+Q(x)$

Aplicando la definición:	Disposición práctica:
$P(x)+Q(x)=-3x^4+(6+2)x^3-3x^2+(-2+5)x+(4-2)=$ $-3x^4+8x^3-3x^2+3x+2$	$-3x^4+6x^3+0x^2-2x+4$ $+$ $2x^3-3x^2+5x-2$ $-3x^4+8x^3-3x^2+3x+2$

La suma de polinomios satisface las siguientes propiedades:

a) Asociativa

b) Conmutativa

c) Existencia del elemento neutro

El polinomio nulo $O(x)$ es tal que, para cualquier polinomio $P(x)$ se verifica que:

$$P(x)+O(x)=O(x)+P(x)=P(x)$$

d) Existencia del elemento opuesto

Para todo $P(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_nx^n$, existe su opuesto

$$-P(x)=-a_o+(-a_1)x+(-a_2)x^2+\ldots+(-a_n)x^n \text{ que verifica:}$$

$$P(x)+(-P(x))=P(x)-P(x)=0(x)$$

<u>**DIFERENCIA DE POLINOMIOS**</u>: Para restar el polinomio $Q(x)$ del polinomio $P(x)$ se debe sumar al polinomio $P(x)$ el opuesto de $Q(x)$:

$$P(x)-Q(x)=P(x)+[-Q(x)]$$

<u>Ejemplo</u>: Calcular $P(x)-Q(x)$ si $P(x)=3x^2-5x+1$ y $Q(x)=x^2-7x-3$

Como el opuesto de $Q(x)$ es $-Q(x)=-x^2+7x+3$, resulta:

$$\begin{array}{rl} & 3x^2-5x+1 \\ + & -x^2+7x+3 \\ \hline & 2x^2+2x+4 \end{array}$$

Entonces $P(x)-Q(x)=2x^2+2x+4$

<u>**PRODUCTO DE POLINOMIOS:**</u> Para multiplicar dos polinomios se multiplica cada monomio de uno de ellos por cada uno de los términos del otro y luego se suman los coeficientes de los términos de igual grado (para operar se deben tener en cuenta las propiedades distributiva del producto respecto de la suma de números reales y del producto de potencias de igual base).

<u>Ejemplo</u>: Dados dos polinomios:

$P(x)=2x^3-3x^2+x-1$ y $Q(x)=-x^2+5x$, realizar el producto de los mismos.

Disposición práctica:

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 3x^2 + x - 1 \\ -x^2 + 5x \\ \hline 10x^4 - 15x^3 + 5x^2 - 5x \\ -2x^5 + 3x^4 - x^3 + x^2 \quad \\ \hline -2x^5 + 13x^4 - 16x^3 + 6x^2 - 5x \end{array}$$

Entonces $P(x).Q(x) = -2x^5 + 13x^4 - 16x^3 + 6x^2 - 5x$

<u>**O sea**</u>:

1) Multiplicamos un término del multiplicador por cada término del multiplicando.
2) Multiplicamos el otro término del multiplicador por cada término del multiplicando y encolumnamos los monomios de igual grado.
3) Efectuamos la suma.

El producto de polinomios verifica las siguientes propiedades:

a) Asociativa
b) Conmutativa
c) Existencia del elemento neutro para el producto.
   El polinomio $I(x) = 1$ es tal que para cualquier polinomio $P(x)$ se verifica:

$$P(x).I(x) = I(x).P(x) = P(x)$$

¡Algunos productos notables!

- Cuadrado de un binomio $(x+a)^2 = (x+a)(x+a) = x^2 + 2xa + a^2$
- Cubo de un binomio $(x+a)^3 = (x+a)(x+a)(x+a) = x^3 + 3x^2a + 3xa^2 + a^3$
- Producto de la suma por la diferencia de dos números

$$(x+a)(x-a) = x^2 - ax + ax - a^2 = x^2 - a^2$$

<u>Ejemplo</u>:

$$(2x - 3x^4)^2 = (2x)^2 - 2.(2x).(3x^4) + (3x^4)^2 = 4x^2 - 12x^5 + 9x^8$$

O también

$$\left(2x-3x^4\right)^2=\left(2x-3x^4\right)\left(2x-3x^4\right)=4x^2-6x^5-6x^5+9x^8=4x^2-12x^5+9x^8$$

<u>DIVISIÓN DE POLINOMIOS</u>: Para efectuar la división entre dos polinomios, el polinomio dividendo debe ser de grado mayor o igual que el grado del polinomio divisor y deben estar ordenados en forma decreciente.

Además el polinomio dividendo debe estar completo.

<u>Ejemplo</u>:

Dados dos polinomios: $P(x)=3x^3-2x^2-1$ y $Q(x)=1-x+x^2$

$$\begin{array}{rl|l}
 & 3x^3-2x^2+0x-1 & x^2-x+1 \\ \cline{3-3}
 & -3x^3+3x^2-3x & =\quad 3x+1 \\ \cline{2-2}
 & x^2-3x-1 & \\
 & -x^2+\ \ x-1 & \\ \cline{2-2}
 & -2x-2 &
\end{array}$$

Luego el cociente es $C(x)=3x+1$ y el resto es $R(x)=-2x-2$

La descripción del proceso es la siguiente:

1. El primer monomio del cociente se obtiene dividiendo el monomio de mayor grado del dividendo por el divisor: $3x^3:x^2=3x$
2. Se multiplica $3x$ por el divisor y el resultado se resta del dividendo.
3. Una vez obtenida la diferencia se inicia el proceso como si ésta fuera el dividendo.
4. El proceso concluye cuando la diferencia es de grado inferior al divisor.

Cuando el **resto** de la división es **cero**, entonces se dice que la **división es exacta** y que el dividendo, $P(x)$, es **múltiplo** de $Q(x)$, o bien que $P(x)$ es **divisible** por $Q(x)$ y se cumple la relación:

$$\boxed{P(x)=Q(x).C(x)}$$

REGLA DE RUFFINI

Esta regla se emplea para dividir un polinomio por otro de la forma $x+a$, con $a\in R$.

Ejemplo: Dados $P(x)=3x^3-2x+1$ y $Q(x)=x+1$

Se esquematiza:

①→	3	0	-2	1
② -1	↓	-3	3	-1
	③ 3	④ -3	⑤ 1	⑥ $\boxed{0}$

Pasos:

① Se escriben los coeficientes del dividendo completo y ordenado.

② A la izquierda se escribe el opuesto del término independiente del divisor (es -1).

③ El primer coeficiente queda igual (es 3).

④ El segundo coeficiente se obtiene efectuando $3.(-1)$ y sumando este resultado a cero (es -3).

⑤ El tercer coeficiente se obtiene efectuando $(-3).(-1)$ y sumando este resultado a -2 (queda 1).

⑥ Por último, multiplicamos $1.(-1)$ y le sumamos 1 (es 0).

a) El resto de la división es el último número obtenido en el paso ⑥, es decir $R(x)=0$.

b) El polinomio cociente es de un grado menor que $P(x)$ y sus coeficientes son los obtenidos por la regla antes mencionada en los pasos ③, ④ y ⑤, este resulta:

$$C(x)=3x^2-3x+1$$

Si el divisor es de la forma $nx-a$, para poder aplicar Ruffini se debe tener presente que:

Si en una división dividimos el **divisor** por un número n, debemos dividir al **dividendo** por n para que el cociente sea el mismo. El **resto** queda dividido por n.

TEOREMA DEL RESTO

El resto de la división entre un polinomio $P(x)$ por otro de la forma $x-a$, con $a\in R$, es el valor numérico de $P(x)$ para $x=a$.

Ejemplo**:** En el caso de la división del ejemplo anterior (donde se aplicó la regla de Ruffini)

$$P(-1)=3(-1)^3-2(-1)+1=3(-1)+2+1=-3+2+1=0$$

Luego el resto es $R(x)=0$

Cuando el valor del resto es cero, significa que el polinomio $P(x)$ es divisible por $x-a$. El valor de x que hace cero a $P(x)$ se denomina **cero o raíz** del polinomio.

FACTORIZACIÓN DE POLINOMIOS

Si dos expresiones algebraicas **A** y **B** se multiplican y su producto es **C**, es decir: **A.B=C**, cada una de las expresiones algebraicas **A** y **B** es un **factor** de **C**.

Ejemplo:

$(x-1)(x-3)=x^2-4x+3$ entonces $(x-1)$ y $(x-3)$ son factores de x^2-4x+3

En la resolución de problemas matemáticos es a menudo conveniente determinar los factores de una expresión algebraica. El procedimiento para hallar estos factores (cuando existen) se denomina factores o descomposición en factores de la expresión dada.

Una expresión algebraica es **irreducible** o **prima** si no se puede expresar como el producto de otras expresiones. Por ejemplo $(x-1)$ es una expresión irreducible o prima.

Factorear o **factorizar** una expresión algebraica es expresarla como el producto de sus factores primos.

En el ejemplo dado anteriormente $(x-1)$ y $(x-3)$ son factores primos, por lo tanto la expresión

$x^2-4x+3=(x-1)(x-3)$, está factoreada

CASOS DE FACTOREO

*** FACTOR COMÚN:** una expresión es factor común en una suma algebraica cuando figura en cada término como factor, por ejemplo $a.b+a.c$ el factor común es *a.*

Por la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma:

$$a.(b+c)=a.b+a.c$$

Recíprocamente

$$a.b+a.c=a.(b+c)$$

Por lo tanto, si en todos los términos de una expresión algebraica figura un factor común, dicha expresión es igual al producto de ese factor por la expresión que resulta de dividir cada término por el factor.

Ejemplo:

Sea el polinomio $P(x)=3x^2-6x=3\cdot x\cdot x-3\cdot 2\cdot x$, en el observamos que el factor 3 aparece en todos los términos, lo mismo que el factor x , luego el polinomio $P(x)$ se puede escribir como

$$P(x)=3x^2-6x=3x\cdot(x-2)$$

En algunos casos resulta conveniente extraer un factor de todos los términos, aunque no sea común a todos ellos. Por ejemplo si necesitamos que el coeficiente del término cuadrático de $3x^2+5x-2$ sea 1, debemos extraer como factor de toda la expresión el número 3. Es decir:

$$3x^2+5x-2=3.\left(x^2+\frac{5}{3}x-\frac{2}{3}\right)$$

*** FACTOR COMÚN POR GRUPO:** algunas expresiones presentan una estructura que nos permite formar grupos de igual cantidad de términos y sacar factor común en cada uno de esos grupos. Una vez hecho esto, aparece un nuevo factor común en todos los grupos.

Ejemplo:

$$P(x)=x^5-2x^4-3x+6$$

$$P(x)=\underbrace{(x^5-2x^4)}_{x^4}+\underbrace{(-3x+6)}_{-3}$$

Se forman grupos de igual cantidad de términos, de forma tal que en cada uno de ellos haya un factor común

$$P(x)=x^4(x-2)-3(x-2)$$

En cada término debe aparecer el mismo factor para poder extraerlo nuevamente como factor común.

$$P(x)=(x-2)(x^4-3)$$

Al sacar nuevamente factor común, la expresión queda factorizada a través del factor común por grupos.

*** DIFERENCIA DE CUADRADOS:** al analizar los productos notables vimos que:

$$(a+b).(a-b)=a^2-b^2$$

Recíprocamente $\quad a^2-b^2=(a+b).(a-b)$

Luego toda diferencia de cuadrados es igual a la suma por la diferencia de las bases.

Ejemplo: $4x^2-y^2=(2x)^2-(y)^2=(2x+y)(2x-y)$, con lo que este polinomio queda factoreado.

La suma de cuadrados $a^2 + b^2$ no se puede factorear en el conjunto de los números reales.

<u>* TRINOMIO CUADRADO PERFECTO:</u> en productos notables vimos que el cuadrado de un binomio es igual a:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2.a.b + b^2$$

Recíprocamente $\quad a^2 + 2.a.b + b^2 = (a+b)^2$

esta expresión de tres términos recibe el nombre de **trinomio cuadrado perfecto**, luego, todo polinomio que cumpla con esta regla es igual al cuadrado del binomio formado por las bases de los cuadrados.

<u>Ejemplo</u>: $\quad x^2 + 6x + 9 = (x)^2 + 2.3.x + (3)^2 = (x+3)^2$

<u>* CUATRINOMIO CUBO PERFECTO</u>: también vimos en los productos notables el desarrollo de $(a+b)^3$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3$$

Recíprocamente $\quad a^3 + 3.a^2.b + 3.a.b^2 + b^3 = (a+b)^3$

esta expresión de cuatro términos recibe el nombre de **cuatrinomio cubo perfecto**, luego, todo polinomio que cumpla con esta regla es igual al cubo del binomio formado por las bases de los cubos.

<u>Ejemplo</u>**:** $\quad x^3 + 6.x^2 + 12.x + 8 = (x+2)^3$

<u>* BINOMIOS DE LA FORMA</u> $\quad a^n \pm b^n$**, con** $n \geq 3$

- <u>Para $n = 3$</u>: **Suma o diferencia de cubos:** efectuando los siguientes productos, obtenemos

$$(a+b).(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$(a-b).(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

Recíprocamente $\quad a^3 + b^3 = (a+b).(a^2 - ab + b^2)$

$$a^3 - b^3 = (a-b).(a^2 + ab + b^2)$$

<u>Ejemplos</u>:

a) $x^3 + 27 = x^3 + 3^3 = (x+3).(x^2 - x.3 + 3^2) = (x+3).(x^2 - 3x + 9)$

b) $x^3 - 1 = x^3 - 1^3 = (x-1).(x^2 + x.1 + 1^2) = (x-1).(x^2 + x + 1)$

- Para $n > 3$: existen dos posibilidades

a) Binomios que pueden reducirse a diferencia de cuadrados, suma de cubos o diferencia de cubos.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} x^6 - y^6 &= (x^3)^2 - (y^3)^2 = (x^3 - y^3)(x^3 + y^3) \\ &= (x-y)(x^2+xy+y^2)(x+y)(x^2-xy+y^2) \\ &= (x-y)(x+y)(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2) \end{aligned}$$

b) Binomios que NO están incluidos en a)

Estos se pueden factorear por medio de las siguientes fórmulas:

$a^n + b^n$, si *n* es par: no se puede factorizar

$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots \pm b^{n-1})$ si *n* es impar

$$a^n - b^n = \begin{cases} (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1}) \\ (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots \pm b^{n-1}) \end{cases}$$ cuando *n* es par

$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1})$ si *n* es impar

Ejemplo:

$$\begin{aligned} x^5 - 32 &= x^5 - 2^5 = (x-2)(x^4 + x^3 2 + x^2 2^2 + x 2^3 + 2^4) \\ &= (x-2)(x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16) \end{aligned}$$

En algunas expresiones se podrá aplicar, en forma sucesiva, más de un caso de factoreo. Para resolver estos ejercicios se sugiere factorear en el siguiente orden:

1 Buscar factor común, ya sea único o por grupos.

2 Si el polinomio tiene dos términos buscar diferencias de cuadrados o suma o diferencia de potencias de igual grado.

3 Si tiene tres términos puede ser el cuadrado de un binomio.

4 Si tiene cuatro términos puede ser el cubo de un binomio.

EXPRESIONES ALGEBRAICAS RACIONALES FRACCIONARIAS

Una expresión algebraica fraccionaria es una expresión de la forma $\frac{P(x)}{Q(x)}$ siendo el grado de $Q(x)$ mayor o igual que uno (con esto quedan excluidos el polinomio nulo y todos los polinomios de grado cero).

Se puede operar con las expresiones algebraicas fraccionarias y se lo hace de igual modo a como se suman, restan, multiplican y dividen las fracciones numéricas.

<u>SIMPLIFICACIÓN</u>: Una de las aplicaciones más importantes del principio fundamental de las expresiones algebraicas es la de reducir una fracción a su **mínima expresión**.

Una fracción está escrita en su mínima expresión cuando el numerador y el denominador no tienen ningún otro factor común que +1.

<u>Ejemplo</u>:

Simplificar $\frac{x^2(x-3)}{x^2-9}$ a su mínima expresión.

$\frac{x^2(x-3)}{x^2-9}$ factorizando el denominador se tiene: $\frac{x^2(x-3)}{(x-3)(x+3)}$

de donde: $$\frac{x^2(x-3)}{x^2-9}=\frac{x^2}{(x+3)}$$

<u>ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN</u>

La suma de fracciones algebraicas requiere, como la suma de fracciones aritméticas ordinarias, que éstas tengan el mismo denominador. En caso contrario, es preciso calcular el denominador común de las fracciones dadas.

Con el objeto de abreviar los cálculos, es conveniente que ese denominador común sea el de menor grado posible y, por supuesto, múltiplo de todos los denominadores. Esto es lo que se llama **mínimo común denominador** de las fracciones dadas (el mínimo común denominador es el mínimo común múltiplo de los denominadores dados).

Para obtenerlo, efectuamos los siguientes pasos:

a) Factoreamos los denominadores.

b) Formamos el producto de los factores primos comunes y no comunes, con su mayor exponente.

Luego:

La suma algebraica de varias fracciones de igual denominador es otra fracción cuyo denominador es el mismo y cuyo numerador es la correspondiente suma algebraica de los numeradores.

Ejemplo: $$\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{a-b}-\frac{2ab}{a-b}=\frac{a^2+b^2-2ab}{a-b}=\frac{(a-b)^2}{a-b}=a-b$$

Es importante observar que la expresión anterior no está definida cuando a=b, puesto que produce un denominador igual a cero. Así para ser precisos debemos escribir

$$\frac{a^2}{a-b}+\frac{b^2}{a-b}-\frac{2ab}{a-b}=a-b, \qquad a\neq b$$

Si las fracciones tienen denominadores diferentes, calculamos el mínimo común denominador y procedemos como en la suma algebraica de fracciones aritméticas ordinarias.

Ejemplo:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x+2a}+\frac{1}{x-2a}-\frac{4}{x^2-4a^2}&=\frac{1}{x+2a}+\frac{1}{x-2a}-\frac{4}{(x+2a)(x-2a)}\\&=\frac{x-2a+x+2a-4}{(x+2a)(x-2a)}\\&=\frac{2x-4}{(x+2a)(x-2a)}\\&=\frac{2(x-2)}{(x+2a)(x-2a)}\end{aligned}$$

MULTIPLICACIÓN

El producto de dos o más fracciones algebraicas es otra fracción algebraica cuyo numerador es el producto de los numeradores y el denominador es el producto de los denominadores de las fracciones dadas.

Con el objeto de obtener un resultado ya simplificado, éste es, reducido a su más simple expresión, es conveniente factorear los numeradores y denominadores de las fracciones dadas, eliminando los factores comunes a los mismos antes de efectuar la multiplicación.

Ejemplo:

$$\frac{a+2b}{a^2-b^2}\cdot\frac{2b-a}{b-a}\cdot\frac{a+b}{4b^2-a^2}=\frac{a+2b}{(a-b)(a+b)}\cdot\frac{2b-a}{b-a}\cdot\frac{a+b}{(2b-a)(2b+a)}$$
$$=\frac{1}{(a-b)(b-a)}=\frac{1}{(a-b)(-1)(a-b)}=-\frac{1}{(a-b)^2}$$

DIVISIÓN

Para dividir una fracción por otra basta multiplicar, de la manera antes indicada, la fracción dividendo por la fracción recíproca del divisor.

En símbolos:

$$\boxed{\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}}$$

Ejemplo:

$$\frac{49x^2y^2-1}{3xy+1}\div\frac{1-7xy}{9x^2y^2-1}=\frac{49x^2y^2-1}{3xy+1}\cdot\frac{9x^2y^2-1}{1-7xy}$$
$$=\frac{(7xy-1)(7xy+1)}{3xy+1}\cdot\frac{(3xy+1)(3xy-1)}{1-7xy}$$
$$=\frac{(-1)(1-7xy)(7xy+1)(3xy-1)}{1-7xy}$$
$$=(7xy+1)(1-3xy)$$

ACTIVIDADES

- **Actividad 1:** Completar los siguientes enunciados:

 a) El polinomio $5x^4 - 2x + 4y$ tiene ____________términos.

 b) En el polinomio $3x^3 - 4x^2 - 7$, el coeficiente del término x^2 es ___________.

 c) El grado del monomio $5x^4y^2$ es _______.

 d) El grado del polinomio $2xy - 3x^2y$ es ________.

 e) El grado del monomio 4 es ________.

 f) El grado del polinomio 0 es ________.

- **Actividad 2:** Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

 a) Es posible sumar dos polinomios de distinto grado.

 b) La suma de dos polinomios de grado 4 es siempre un polinomio de grado 4.

 c) $P(x) - Q(x) = P(x) + (-1)Q(x)$.

- **Actividad 3:** ¿Cuál es el grado de $P(x).Q(x)$, sabiendo que el grado del primero es m y del segundo es n?. Justificar la respuesta.

- **Actividad 4:** Dados los polinomios:

$$P(x) = 2x^5 - 3x^3 + 6x \qquad Q(x) = 4x^4 - 6x + 10$$

$$R(x) = x^2 + x - 1 \qquad S(x) = \frac{2}{3}x \qquad T(x) = \frac{3}{2}x^2$$

 Hallar:

 a) $P(x) + Q(x)$

 b) $Q(x) - [R(x) + S(x)]$

 c) $P(x) - \frac{1}{2}Q(x)$

 d) $P(x).R(x)$

 e) $P(x) : R(x)$

 f) $[S(x) + T(x)]^2$

- **Actividad 5:** Calcular:

a) $\left(\frac{1}{2}x+3\right)\cdot\left(\frac{1}{2}x-3\right)$ b) $\left(-\frac{3}{4}x+5x^2\right)\cdot\left(-\frac{3}{4}x-5x^2\right)$

c) $\left(8x^2-\frac{1}{2}x\right)\cdot\left(8x^2+\frac{1}{2}x\right)$ d) $(x+5)^2$

e) $\left(\frac{7}{3}-4x\right)^2$ f) $\left(-\frac{3}{4}x^2-\frac{1}{2}x\right)^2$

g) $\left(3x+\frac{1}{2}\right)^3$ h) $\left(\frac{3}{4}x^2-2x\right)^3$

- **Actividad 6:** ¿Es siempre cierto que $(x-1)^2=(1-x)^2$? Fundamentar.

- **Actividad 7:** Hallar a, b y c de modo que:

$$\left(x^2-2x+3\right)\left(ax^2+bx+c\right)=2x^4+x^3-3x^2+13x+3$$

- **Actividad 8:** En termodinámica, la cantidad de calor, Q, traspasada por radiación entre dos áreas paralelas iguales, *A,* en el tiempo *t*, es

$$Q=\bar{e}A\left\{\left(\frac{T_1}{100}-\frac{T_2}{100}\right)\left(\frac{T_1}{100}+\frac{T_2}{100}\right)\times\left[\left(\frac{T_1}{100}\right)^2+\left(\frac{T_2}{100}\right)^2\right]\right\}10^8t$$

donde $\bar{e}$ es la constante de radiación y T_1 y T_2 son las temperaturas absolutas de las áreas. Simplificar esta ecuación multiplicando los términos entre llaves.

- **Actividad 9:** Si $P(x)=x^2+2x+1$y $P(x).Q(x)=x^3+3x^2+3x+1$, encontrar *Q(x).*

- **Actividad 10:** Resolver las siguientes divisiones aplicando la Regla de Ruffini

a) $\left(2x^3+2x^2-48x+72\right):(x-2)$ b) $\left(4x^4+\frac{1}{2}x\right):\left(x+\frac{1}{2}\right)$

c) $\left(\frac{1}{2}x^4-\frac{7}{4}x^3-\frac{17}{4}x^2+\frac{29}{2}x-6\right):(x-4)$

- **Actividad 11:** El área de un rectángulo está definida por x^3+6x^2-7x y la longitud de un lado del rectángulo es $x+7$.

  a) Si el área del rectángulo es igual al producto de la base por la altura, ¿qué expresión algebraica describe el ancho de este rectángulo?

  b) Si $x = 4$ cm. ¿cuáles son el largo, el ancho y el área de este rectángulo?

- **Actividad 12:** Verificar si el valor indicado es o no una raíz (o cero) del polinomio dado

  a) $P(z)=z^3+2z^2+2z+4$ $\quad z=-2$

  b) $P(x)=x^4-3x^2+x+4$ $\quad x=2$

  c) $P(x)=x^4-10000$ $\quad x=-10$

- **Actividad 13:** Indicar sin realizar la división si los siguientes polinomios son divisibles.

  a) $P(x)=x^5-1$ $\quad Q(x)=x-1$

  b) $P(x)=x^3-1$ $\quad Q(x)=x+1$

  c) $P(x)=x^2+6x+9$ $\quad Q(x)=x+3$

  d) $P(x)=x^4-x^2-12$ $\quad Q(x)=x+1$

- **Actividad 14:** Probar que $(x-1)$ y $(x+2)$ son factores del polinomio

$$P(x)=x^4+2x^3-7x^2-8x+12$$

- **Actividad 15:** Factorizar los siguientes polinomios.

  a) $6a^2x^2+9abx^2+3acx^2$

  b) $6am+4m+15an+10n$

  c) $a^5-a^2b+a^3-b$

  d) $a^4+2a^2b^2+b^4$

  e) $(a-b)^2+4(a-b)+4$

  f) $16-x^4$

  g) $\frac{1}{a^2}+\frac{2}{ab}+\frac{1}{b^2}$

  h) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}$

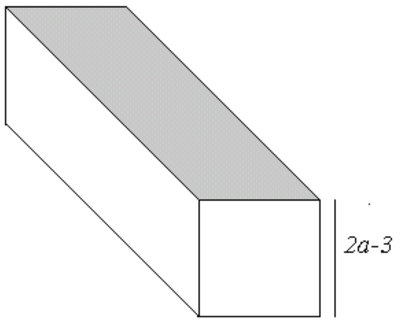
  i) $9-a^2-2ab-b^2$

  j) $8+12x+6x^2+x^3$

  k) x^3+8

- **Actividad 16:** El costo C para que una compañía produzca n artículos está dado por la ecuación $C(n) = 0.0001n^3 - 0.2n^2 - 3n + 6000$. Factorizar el miembro derecho de esta ecuación.

- **Actividad 17:** El volumen de la caja de la figura está dado por la expresión $8a^3 - 27$. Encontrar el área de la tapa (sombreada) en términos de a.



- **Actividad 18:** Realizar las operaciones indicadas, simplificando cuando sea posible:

a) $\dfrac{18}{x^2+3x} - \dfrac{4}{x} + \dfrac{6}{x+3}$

b) $\dfrac{1}{x+2a} + \dfrac{1}{x-2a} - \dfrac{4a}{x^2-4a^2}$

c) $\dfrac{x^2+1+2x}{x^2+1+x} \cdot \dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

d) $\left(x - y - \dfrac{xy-y^2}{x}\right) . \dfrac{x}{x^2-y^2}$

e) $\dfrac{\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}+1}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}} : \dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$

f) $\dfrac{2a^4b^2-2a^2b^4}{a^5+ab^4-2a^3b^2} : \left(\dfrac{a+b}{a-b} - \dfrac{4ab}{a^2-b^2}\right)$

Módulo 3

RELACIONES Y FUNCIONES

"Esa flor del pensamiento matemático moderno:

el concepto de función"

THOMAS J. McCORMACK

INTRODUCCIÓN

Las funciones desempeñan en la actualidad un papel fundamental en las Aplicaciones de la Matemática a otras ciencias.
El término "función" (del latín *functio*, acto por realizar) lo utilizó por primera vez Gottfried Leibniz en 1694, referido a curvas.
Un siglo más tarde, Leonhard Euler veía una función como una expresión formada con constantes y variables. Fue él quien puso de moda el símbolo $f(x)$, introducido por Alexis Clairaut en 1734.
La definición hoy aceptada la incorporó Gustav Dirichlet a mediados del siglo XIX.

OBJETIVOS

- Definir y clasificar funciones
- Identificar y graficar una función lineal considerando los casos particulares
- Identificar y graficar una función de 2º grado
- Resolver ecuaciones de 1º y 2º grado
- Plantear y resolver situaciones problemáticas

CONTENIDOS

✓ Relaciones y funciones

✓ Función de primer grado

✓ Ecuaciones de primer grado con una incógnita

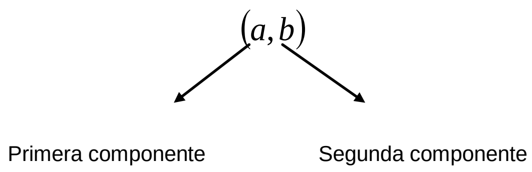
✓ Función de segundo grado

✓ Ecuaciones de segundo grado con una incógnita

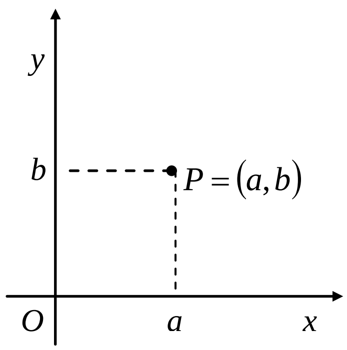
RELACIONES Y FUNCIONES

Par ordenado

Se denomina par ordenado (a,b) a una lista de dos objetos, dados en un cierto orden, en donde a es un elemento de un conjunto A y b es un elemento de un conjunto B.



A cada par ordenado (a,b), le corresponde un punto *P* en el plano cartesiano tal que la primera componente del par es representada en el **eje** x (eje de las abscisas) y la segunda componente se representa en el **eje** y (eje de las ordenadas). Recíprocamente a cada punto *P* del plano le corresponde un par ordenado.



Producto cartesiano

Dados dos conjuntos A y B no vacíos, se define el producto cartesiano $A\times B$ como el conjunto de todos los pares ordenados cuya primera componente es un elemento de A y la segunda componente es un elemento de B.

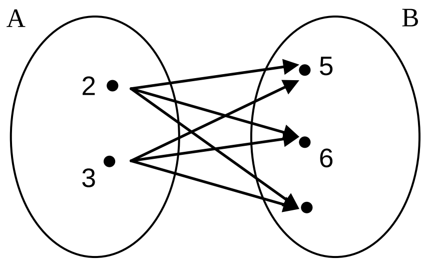
$$A\times B=\{(a,b)/\,a\in A\ \wedge\ b\in B\}$$

<u>Ejemplo</u>: **Consideremos los conjuntos** $A=\{2,3\}$ y $B=\{5,6,7\}$. El producto cartesiano $A\times B$ donde $A\times B=\{(2,5),(2,6),(2,7),(3,5),(3,6),(3,7)\}$puede ser representado mediante:

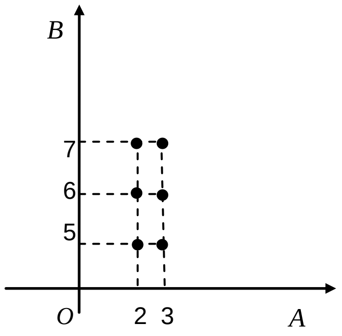
TABLAS

A \ B	5	6	7
2	$(2,5)$	$(2,6)$	$(2,7)$
3	$(3,5)$	$(3,6)$	$(3,7)$

DIAGRAMAS DE VENN



SISTEMAS DE EJES CARTESIANOS



RELACIONES

Como ya se dijo, el producto cartesiano proporciona todas las posibles combinaciones que existen entre los elementos de dos conjuntos, sin embargo de todas ellas sólo pueden llegar a interesar algunas.

Ejemplo:

Si $A = \{2,3\}$ y $B = \{5,6,7\}$

¿Cuáles son los pares ordenados que satisfacen: "…es divisor de …"?

$A \times B$ provee todas las posibles elecciones, pero sólo un subconjunto de ellas da la relación correcta.

Así:

Se llama **relación** de *A* en *B* a todo subconjunto R del producto cartesiano $A \times B$

$$\boxed{\mathrm{R} \subset \mathrm{A} \times \mathrm{B}}$$

- ✓ El conjunto A se llama **conjunto de partida** y el conjunto B se llama **conjunto de llegada** de la relación.
- ✓ Si $(a,b) \in \mathrm{R}$ se dice que a **está relacionado** con b; o bien b **es imagen** de a por R, o que a es la **preimagen** de b por R.

Ejemplo:

Dados los conjuntos: $A = \{2,3\}$, $B = \{5,6,7\}$ y la relación R: "…es divisor de…", se tiene que

$$R = \{(2,6),(3,6)\} \subset A \times B$$

Dominio:

Se llama dominio, D(R), de una relación de A en B al subconjunto de A formado por las primeras componentes de los pares ordenados que pertenecen a la relación.

En el ejemplo dado precedentemente, se tiene que: $\mathrm{D(R)} = \{2,3\}$

Imagen:

Se llama imagen, I(R), de una relación de A en B al subconjunto de B formado por las segundas componentes de los pares ordenados que pertenecen a la relación.

En el ejemplo anterior, se tiene que: $\mathrm{I(R)} = \{6\}$

Relación Inversa

Sea una relación R de A en B, se denomina **relación inversa** R^{-1} de B en A, a la que resulta de invertir los pares ordenados que satisfacen la relación R.

En símbolos: $\boxed{\mathrm{R}^{-1} = \{(b,a) \in B \times A \ / \ (a,b) \in \mathrm{R}\}}$

En el ejemplo tratado anteriormente, la relación inversa de R, está dada por:

$\boxed{\mathrm{R}^{-1} = \{(6,2),(6,3)\} \subset B \times A}$ y corresponde a la relación: "…es múltiplo de…"

FUNCIÓN

Las funciones son casos particulares de las relaciones. El concepto de **función** es esencial en la formulación matemática de las leyes de la naturaleza, estableciéndose una relación cuantitativa entre las diferentes variables que intervienen en el fenómeno.

Definición

Una función f de *A* en *B* $\left(f : A \to B\right)$ es una relación que cumple:

1. El dominio de f es A.
2. A cada elemento $x \in A$ le corresponde un **único** elemento $y \in B$ que se denota por $y = f\left(x\right)$.

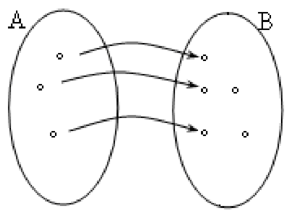
A "x" se la llama **variable independiente** y a "y" **variable dependiente.**

Clasificación de funciones

Función Inyectiva: si a elementos distintos del dominio le corresponden imágenes diferentes.

Siendo $f : A \to B$, es inyectiva, $\Leftrightarrow \forall\, x_1, x_2 \in A$ con $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

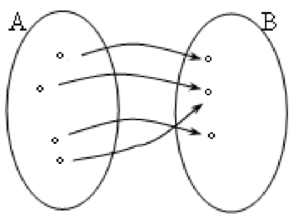
Gráficamente:



Función Sobreyectiva: si para todo elemento de la imagen, siempre existe un elemento del dominio que es su pre-imagen.

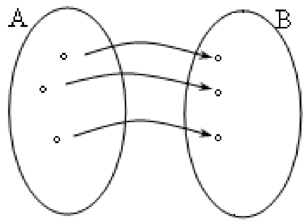
Siendo $f : A \to B$, es sobreyectiva, $\Leftrightarrow \forall\, y \in B,\ \exists\, x \in A\ /\ \ y = f(x)$

Gráficamente:



Función Biyectiva: si es inyectiva y sobreyectiva a la vez.

Gráficamente:



Función Inversa

Una función $f : A \to B$ tiene por inversa otra función si y solo si f es **biyectiva**.

FUNCIÓN DE PRIMER GRADO. ECUACIONES DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

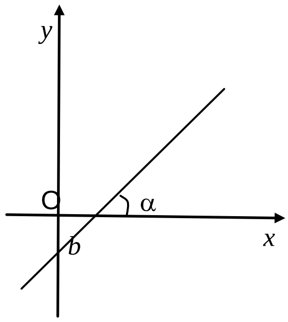
Función de primer grado

Toda función de primer grado en la variable x está dada por:

$$f(x) = mx + b$$

Las funciones de primer grado tienen las siguientes particularidades:

- Su presentación gráfica en el plano es una recta.
- El dominio es el conjunto de los números reales.
- La imagen es el conjunto de los números reales.
- La igualdad $y = mx + b$ se llama **ecuación explícita** de la recta.
- La constante m recibe el nombre de **pendiente** o **parámetro de dirección** y corresponde al valor de la tangente del ángulo α (medido en sentido antihorario) que la recta forma con la dirección positiva del eje x. *En símbolos*: $m = tg\alpha$
- La constante b recibe el nombre de **ordenada al origen** o **parámetro de posición**. Geométricamente representa la intersección de la recta con el eje y.
- El cero de la función es $x = -\dfrac{b}{m}$, geométricamente es la intersección de la recta con el eje x.

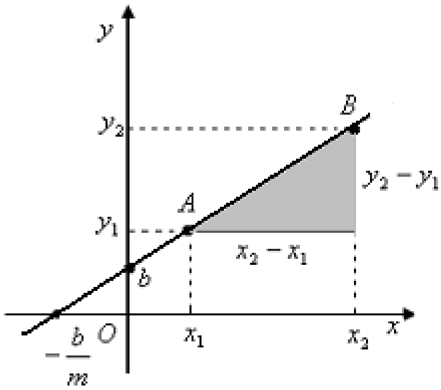


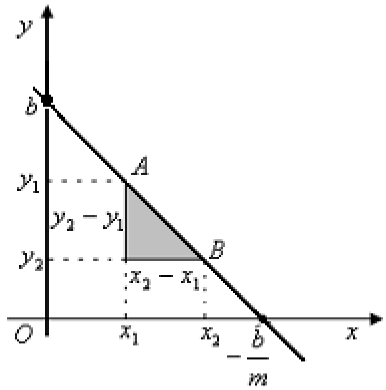
$y = mx + b$

Cálculo de la pendiente

Consideremos la recta que pasa por los puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$. El cociente entre la diferencia de ordenadas y la diferencia de abscisas de dichos puntos es la pendiente de la recta, es un valor que permanece constante. De acuerdo a los siguientes gráficos:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$



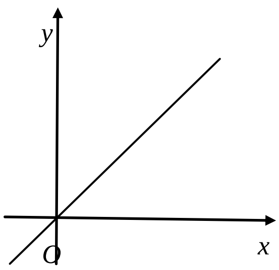


La **pendiente es positiva**, **la función crece** porque $y_2 - y_1$ como $x_2 - x_1$ son números positivos.

La **pendiente es negativa**, **la función decrece** porque $y_2 - y_1$ es un número negativo y $x_2 - x_1$ un número positivo.

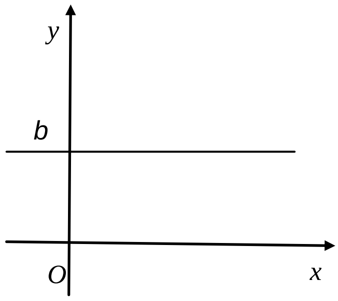
Casos especiales:

- Si $m \neq 0$ y $b = 0$, la ecuación de la recta resulta: $y = mx$ y representa una recta que pasa por el origen del sistema de coordenadas.



$y = mx$

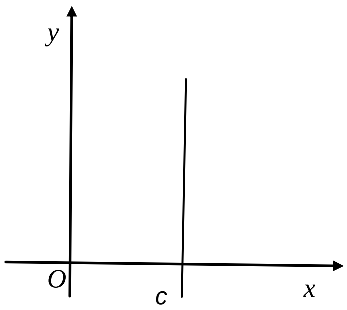
- Si $m=0$ y $b \neq 0$, la ecuación de la recta resulta: $y=b$ y representa una recta paralela al eje x. La función definida por dicha ecuación se llama **función constante**.



$y=b$

- Si $m=0$ y $b=0$, la ecuación de la recta resulta: $y=0$, su gráfica es el eje x. La función definida por dicha ecuación se llama **función nula**.

- El conjunto de puntos $L=\{(x,y)\in R^2 / x=c\}$ tiene por representación gráfica en el plano real a una recta paralela al eje y para $c \neq 0$ y al eje y cuando $c=0$. Observemos que L no es una función.



$x=c$

Ecuación de la recta dado un punto y la pendiente

Dado un punto $P_0=(x_0,y_0)$ y un número real m, la ecuación de la recta de pendiente m y que contiene al punto P_0 es:

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

Rectas paralelas

Las rectas R_1 de ecuación $y=m_1x+b_1$ y R_2 de ecuación $y=m_2x+b_2$ son paralelas si y solo si sus pendientes son iguales, en símbolos:

$$R_1 \| R_2 \Leftrightarrow m_1=m_2$$

Rectas perpendiculares

Las rectas R_1 de ecuación $y = m_1 x + b_1$ y R_2 de ecuación $y = m_2 x + b_2$ son perpendiculares si y solo la pendiente de una es la recíproca negativa de la otra, en símbolos:

$$R_1 \perp R_2 \Leftrightarrow m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Sea la función de primer grado definida por

$$f(x) = ax + b \qquad (1)$$

tomando $f(x) = 0$, la expresión anterior se escribe:

$$ax + b = 0 \qquad (2)$$

que se denomina **ecuación de primer grado en la variable** x.

Por lo tanto, resolver una ecuación del tipo (2) implica hallar los **ceros o raíces** de $f(x) = ax + b$, que al ser de primer grado admite sólo un cero o raíz, es decir sólo un valor de x satisface la ecuación.

Por otra parte, como ya se vio, la gráfica de (1) es una recta y por lo tanto, resolver la ecuación (2) geométricamente significa, determinar la abscisa del punto de intersección de dicha recta con el eje x.

Ejemplo:

Resolver la ecuación $3x + 2 = 0 \qquad (I)$

Sumando -2 a ambos miembros y aplicando la asociatividad de la suma:

$$3x + [2 + (-2)] = 0 + (-2)$$

por la propiedad del neutro aditivo

$$3x = -2 \qquad (II)$$

Multiplicando por $\frac{1}{3}$ a ambos miembros y aplicando la asociatividad del producto:

$$\left(\frac{1}{3}.3\right)x = \frac{1}{3}.(-2)$$

y por la propiedad del inverso y el neutro para el producto se obtiene: $x = -\frac{2}{3}$ (III)

que es la única solución de la ecuación dada.

En la práctica se sintetiza el procedimiento efectuando los pasos marcados por $(I), (II)\ y\ (III)$.

Ecuaciones equivalentes

Dos o más ecuaciones son equivalentes cuando admiten el mismo conjunto solución.

Esta definición es importante en la práctica ya que una ecuación complicada de resolver se puede llevar a otra equivalente de resolución más sencilla, empleando las siguientes propiedades de las ecuaciones equivalentes:

- Si se suma en ambos miembros de una ecuación un mismo término, se obtiene otra ecuación equivalente a la dada.
- Si se suma en ambos miembros de una ecuación un mismo número distinto de cero, se obtiene otra ecuación equivalente a la dada.

FUNCIÓN DE SEGUNDO GRADO.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

En muchas acciones que se realizan en la vida diaria, aparecen curvas. De ellas nos interesan aquellas que describen, por ejemplo, la trayectoria que sigue la pelota cuando se juega al voleibol y a la cual se la denomina ***parábola.***

La función que tiene por gráfica a dicha curva se llama ***función cuadrática***.

FUNCIÓN CUADRÁTICA

Toda función de **segundo grado** o **cuadrática** en la variable x puede expresarse por:

$f(x) = ax^2 + bx + c$ donde a, b y c son números reales, con $a \neq 0$

Las funciones cuadráticas tienen las siguientes particularidades:

- Su representación gráfica en el plano real es una ***parábola.***
- El dominio es el conjunto de los números reales, salvo que se indique lo contrario.
- La imagen es un subconjunto de los números reales y depende de los valores de a, b y c.
- La igualdad $y = ax^2 + bx + c$ es la ecuación de la parábola, en donde:

  a es el coeficiente del ***término cuadrático***

  b es el coeficiente del **término lineal**

  c se denomina **término independiente**
- La ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ puede escribirse (empleando técnicas algebraicas) como $y = a(x - x_v)^2 + y_v$ llamada **forma canónica** (donde x_v e y_v son las coordenadas del vértice).
- La ecuación de la parábola $y = ax^2 + bx + c$ puede escribirse como $y = a(x - x_1).(x - x_2)$ llamada **forma factorizada** (donde x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.)

__Nota:__ Para expresar la ecuación de la parábola en sus distintas formas, es importante tener presente el siguiente esquema.

$$y = ax^2 + bx + c$$

Se desarrolla el cuadrado del binomio

Se hallan las coordenadas del vértice.

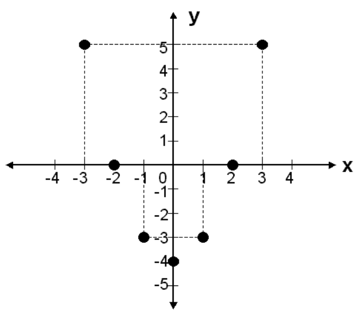
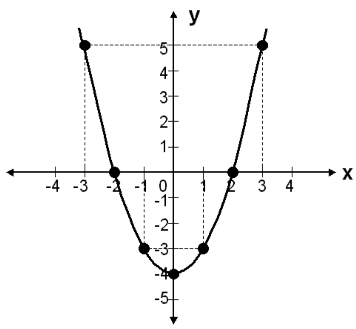
Se aplica la propiedad distributiva

Se hallan las raíces

$$y = a(x - x_v)^2 + y_v \qquad\qquad y = a(x - x_1).(x - x_2)$$

¿Cómo graficar una parábola?

Una manera de graficar la función cuadrática es haciendo uso de una tabla de valores como lo muestra el siguiente ejemplo: $y = x^2 - 4$

<table>
<tr><th>PRIMER PASO
Hacer una tabla de valores</th><th>SEGUNDO PASO
Representar los puntos</th><th>TERCER PASO
Unir los puntos con una línea continua</th></tr>
<tr><td><table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>-3</td><td>5</td></tr><tr><td>-2</td><td>0</td></tr><tr><td>-1</td><td>-3</td></tr><tr><td>0</td><td>-4</td></tr><tr><td>1</td><td>-3</td></tr><tr><td>2</td><td>0</td></tr><tr><td>3</td><td>5</td></tr></table></td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

La parábola y sus elementos

La parábola definida por la ecuación:

$$y = ax^2 + bx + c \quad \text{o por} \quad y = a(x - x_v)^2 + y_v$$

es una curva que presenta las siguientes características generales:

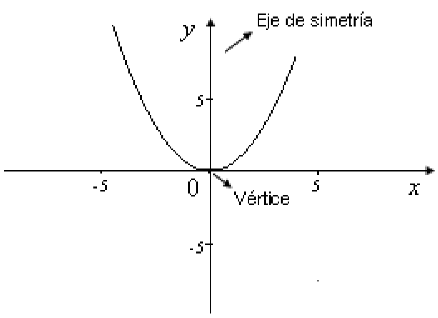
- Posee un **eje de simetría**, paralelo o coincidente con el eje $"y"$, de ecuación:

$$x = -\frac{b}{2a} \quad \text{o bien} \quad x = x_v$$

- Un punto especial llamado **vértice**, que es el punto de intersección de la parábola con el eje de simetría. Además, es el punto donde la parábola alcanza el valor máximo o mínimo, (recordar que: se llama **mínimo** de una función al menor número que tiene su imagen y se llama **máximo** de una función al mayor número que tiene su imagen).

  Las coordenadas del vértice están dadas por:

$$V = \left(\frac{-b}{2a}, c - \frac{b^2}{4a}\right) \quad \text{o} \quad \text{bien} \quad V = (x_v, y_v)$$



$y = x^2$

- La **concavidad** depende de a:

  Si $a > 0$, la concavidad es hacia arriba.

  Si $a < 0$, la concavidad es hacia abajo

ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO CON UNA INCÓGNITA

Sea la función de segundo grado definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$

Tomando $f(x) = 0$, la expresión anterior se escribe:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

que se denomina **ecuación de segundo grado en la variable *x*.**

Por lo tanto, resolver esta ecuación implica hallar los ceros o raíces reales de la función de ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ya que la función es de segundo grado, se tienen **dos raíces** o **ceros**.

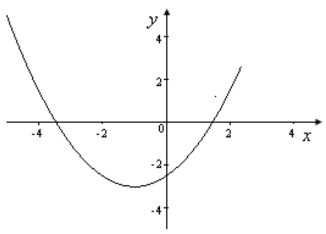
Por otra parte, como ya se vio, la gráfica de dicha función es una parábola y por lo tanto, resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ **geométricamente significa** determinar las abscisas de los puntos de intersección, si es que existen, de la parábola con el eje "*x*".

Para determinar las posibles soluciones (o sea los **ceros** o **raíces reales**) se emplea la fórmula:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

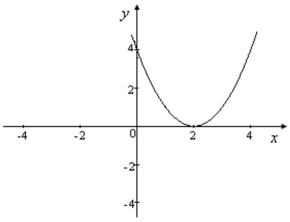
- Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación tiene dos soluciones reales **distintas**.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



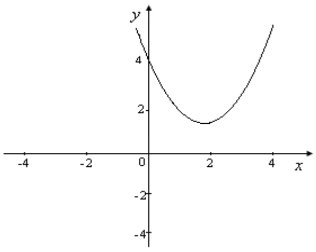
Por lo tanto la parábola corta al eje "*x*" en los puntos $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$.

• Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación tiene una sola raíz real llamada **raíz doble**: $x_{1,2} = -\dfrac{b}{2a}$



Por lo tanto la parábola corta al eje "*x*" en un solo punto.

• Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación **no tiene soluciones reales**.



Lo que significa que la parábola no corta al eje "*x*".

ACTIVIDADES

- **Actividad 1:** Dados los conjuntos: $A=\{1,2\}$ $B=\{a,b,c\}$ $C=\{x\}$

  a) Definir por extensión $A\times B,\quad A\times C,\quad B\times C,\quad A^2$

  b) Con los productos cartesianos hallados, realizar su representación en sistema de ejes coordenados.

- **Actividad 2:** Sea el conjunto $A=\{1,2,3,...,8\}$ y las siguientes relaciones:

  a) R_1: "…es la mitad de…"

  b) R_2:"…es el doble de…"

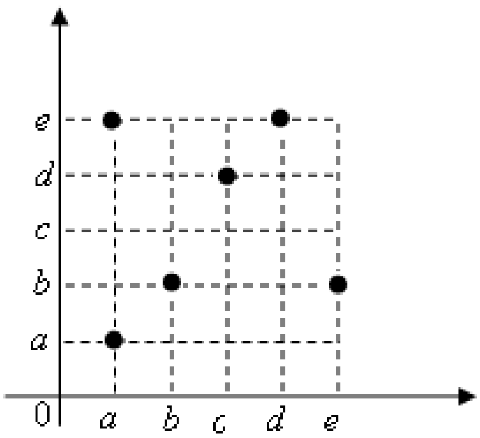
  c) R_3:"…es divisor de…"

  d) R_4: "…es múltiplo de…"

  e) R_5:"…es el cuadrado de…"

  En cada caso haga un estudio completo de la relación (gráfico cartesiano, dominio, imagen, relación inversa)

- **Actividad 3:** Dada la relación R cuya representación gráfica es la siguiente:

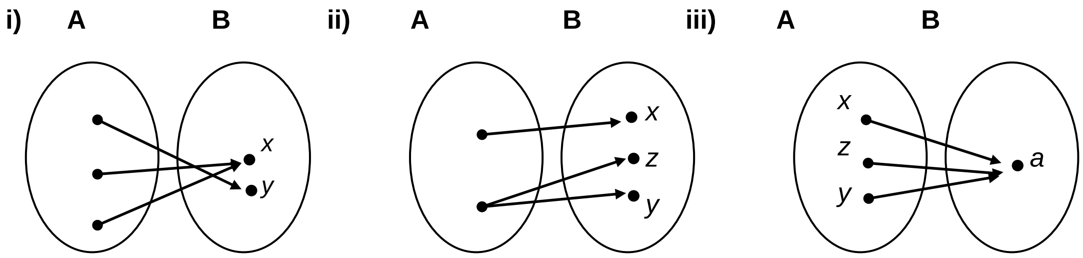


  a) Determinar el dominio y la imagen de la relación.

  b) Marcar con un color diferente los puntos que pertenecen a la relación inversa R^{-1}.

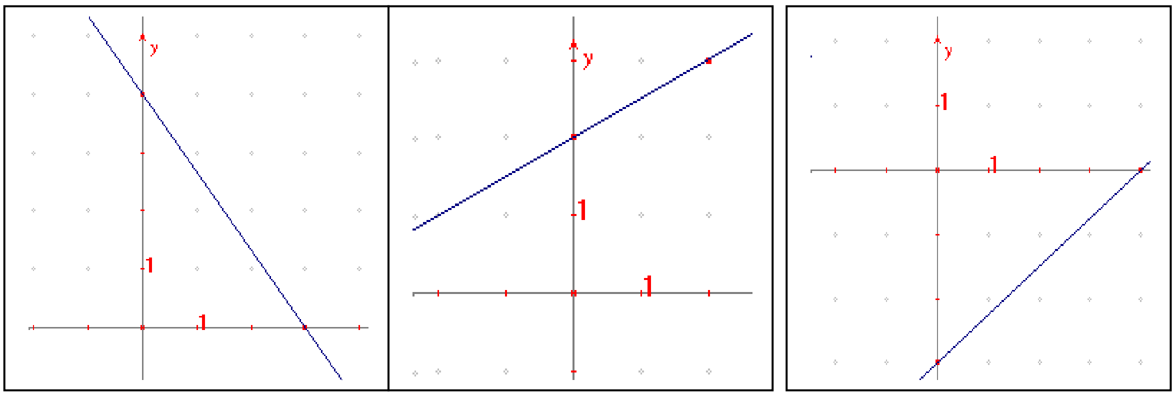
- **Actividad 4:**

  a) Analizar cuáles de los siguientes diagramas corresponden a funciones



b) Responder ¿Para cuáles de estas relaciones se verifica que la inversa es función?

- **Actividad 5:** Determinar las ecuaciones de las funciones cuyos gráficos se dan a continuación.



- **Actividad 6:** Sea la función dada por $y = -2x + 8$. Determinar:

  a) Dominio con notación de conjunto

  b) Imagen con notación de conjunto

  c) Pendiente

  d) Ordenada al origen

  e) Cero de la función

  f) ¿Es creciente o decreciente?

- **Actividad 7:** Determinar el o los valores de $"a"$ para que el punto P pertenezca al gráfico de la función cuya ecuación se especifica:

  a) $P = (3,3)$, $y = ax - 3$ b) $P = (3,-2)$, $-2x + 3y - a = 0$

- **Actividad 8:** Representar gráficamente las siguientes funciones y analizar si son crecientes, decrecientes o constantes:

a) $y=-2x+3$ b) $y=x-3$

c) $y=-2+4x$ d) $y=-2$

e) $y=-\frac{2}{3}x$ f) $y=2(x-1)+3x+1$

- **Actividad 9:** Escribir la ecuación de las rectas correspondientes y representarlas gráficamente:

  a) pasa por el origen de coordenadas y tiene pendiente -8

  b) tiene ordenada al origen 8 y pendiente -1

  c) pasa por el punto $(1,-3)$ y tiene pendiente 0

  d) pasa por $\left(\frac{1}{2},-1\right)$ y es perpendicular a la recta de ecuación $3x+4y=12$

- **Actividad 10:** Resolver las siguientes ecuaciones. Verificar su resultado

  a) $3x-5=x+2$ b) $3(2x-1)=8\left(x-\frac{9}{8}\right)$ c) $(x-1)(x+2)=x^2+5$

  d) $\frac{3x+2}{4}=\frac{5x+1}{2}$ e) $\frac{3(5x+2)}{17}=x$ f) $\frac{9x}{4}-6=\frac{2x}{3}+\frac{1}{3}$

- **Actividad 11:** Plantear y resolver las siguientes situaciones:

  a) La quinta parte de un número disminuida en 4 unidades es 2. ¿Cuál es el número?

  b) La diferencia entre el doble de un número y su consecutivo es 3. ¿Cuáles son esos números?

  c) La suma de tres números pares consecutivos es 60. ¿Cuáles son esos números?

  d) Sea x el primer número de una sucesión en que cada término es igual al triple del anterior, disminuido en la unidad. Si el tercer término es -31, hallar el valor de x.

  e) El perímetro de un jardín rectangular es de 58 m. Si el lado mayor mide 11m más que el lado menor. ¿Cuánto miden los lados del jardín?

- **Actividad 12:** Graficar las funciones cuyas ecuaciones se dan a continuación indicando la concavidad, vértice, raíces, eje de simetría, ordenada al origen y determinar el dominio e imagen.

  a) $y=\frac{x^2}{3}$ b) $y=3x^2+1$ c) $y=x^2-3x+5$

d) $y = 5x^2 - 5; \quad para \quad x \in (-5,-2)$ e) $y = 6x^2 - 12x + 12; \quad para \quad x \in (-1,3)$

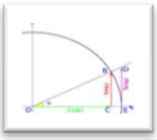
- **Actividad 13:** Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado:

a) $x^2 = 81$ b) $x^2 = 7x$

c) $14x^2 - 28 = 0$ d) $21x^2 + 100 = -5$

e) $x^2 - 3x + 2 = 0$ f) $(x+6)(x-6) = 13$

g) $2x^2 - 6x = 6x^2 - 8x$ h) $(x-3)^2 - (2x+5)^2 = -16$



Módulo 4

TRIGONOMETRÍA PLANA

"No hay un camino lógico que conduzca al camino de leyes elementales. El único camino es el de la intuición que nace del sentimiento de que tras las apariencias hay un orden"

ALBERT EINSTEIN

INTRODUCCIÓN

La Trigonometría fue desarrollada por los astrónomos griegos, quienes consideraban el firmamento como el interior de una esfera, por lo que fue natural que los triángulos sobre una esfera se estudiaran tempranamente (por Menelao de Alejandría alrededor del año 100 d. C.) y que los triángulos sobre un plano no se estudiaran hasta mucho después. El primer libro con un tratamiento sistemático de la trigonometría plana y esférica fue escrito por el astrónomo persa Nasir ed-din (aproximadamente en el año 1250 d. C.).

A Regiomontano (1436-1476) se le atribuye haber llevado la Trigonometría del campo de la astronomía a la de las matemáticas. Su trabajo fue mejorado por Copérnico (1473-1543) y por Retico (1514-1576), discípulo de Copérnico. El libro de Retico fue el primero en definir las seis funciones trigonométricas como relaciones entre los lados de un triángulo, aunque no fue ahí donde recibieron sus nombres actuales. El crédito por esto se le debe a Thomás Fincke (1583), aunque en su época no se aceptó universalmente la notación utilizada por él. La notación actual se estableció finalmente en los libros de texto de Leonard Euler (1707-1783).

La Trigonometría ha evolucionado desde entonces, de su uso por topógrafos, navegantes e ingenieros hasta las aplicaciones actuales en el estudio de las mareas oceánicas, el alza y la caída de la producción de alimentos en ciertos ambientes ecológicos, los patrones de ondas cerebrales y en muchos otros fenómenos.

OBJETIVOS

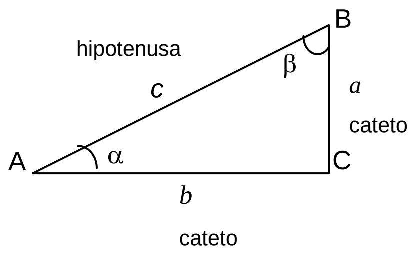
- Resolver situaciones problemáticas cuyo planteamiento llevan a la resolución de triángulos rectángulos.

CONTENIDOS

- ✓ Razones trigonométricas.
- ✓ Relaciones trigonométricas en triángulos rectángulos.
- ✓ Circunferencia trigonométrica.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Recordando los elementos de un triángulo rectángulo:

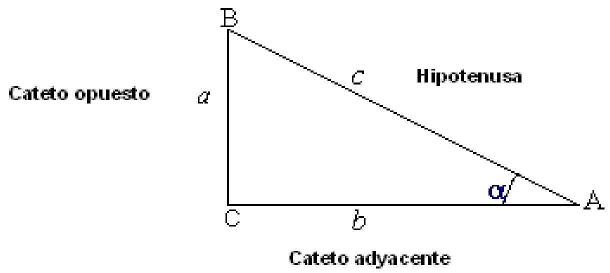
Catetos: son los lados que forman el ángulo recto. **Hipotenusa:** es el lado opuesto al ángulo recto.	

A partir de ello, dado un triángulo rectángulo ACB como el de la figura anterior, se pueden formar seis razones con sus tres lados:

$$\frac{a}{c},\ \frac{b}{c},\ \frac{a}{b},\ \frac{b}{a},\ \frac{c}{b},\ \frac{c}{a}$$

Cada una de las razones arriba mencionadas se denomina razón trigonométrica de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo.
Las razones trigonométricas son: **seno, coseno, tangente, cotangente, secante** y **cosecante** que se las denota como **sen, cos, tg, ctg, sec, cosec**.

En general, dado un triángulo rectángulo ACB como se muestra a continuación:



El seno de un ángulo es el número que expresa la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa (se refiere a su medida), es decir:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{c}$$

De la misma forma se definen las restantes

$$\cos\ \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{a}{b}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{b}{a}$$

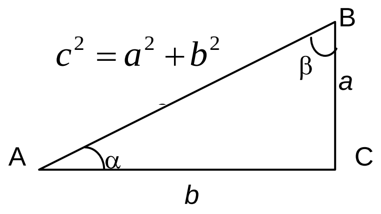
$$\sec\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{c}{b}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}} = \frac{c}{a}$$

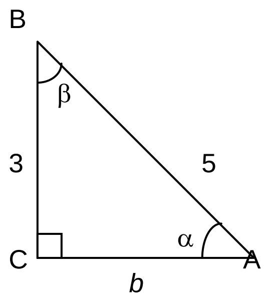
A partir de las razones trigonométricas estudiadas anteriormente y del Teorema de **Pitágoras** que se enuncia a continuación:

El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Ejemplo: Dado el siguiente triángulo rectángulo.



Determinar el valor del lado *b* y de los ángulos α y β.

Por relación pitagórica sabemos que: $5^2 = 3^2 + b^2 \Rightarrow b = \sqrt{5^2 - 3^2} = \sqrt{16} = 4$

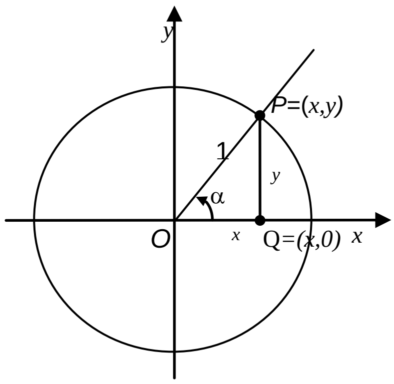
Por definición de razones trigonométricas, tenemos:

$$sen\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} \qquad \Rightarrow sen\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \alpha = 36º52'12''$$

Por ser α y β complementarios se verifica que: $\underline{\beta = 90º - \alpha = 53º7'48''}$

LA CIRCUNFERENCIA TRIGONOMÉTRICA

Considerando un sistema de ejes cartesianos, es posible representar cada una de las razones trigonométricas por medio de segmentos. Para ello se considera una circunferencia de radio unidad centrada en el origen del sistema de coordenadas, llamada **circunferencia trigonométrica.** En ella se puede analizar que sucede con los valores de las razones trigonométricas cuando la medida del ángulo está comprendida entre 0º y 360º (cero a 2π rad).



De este modo se pueden resolver distintas situaciones problemáticas.

En la circunferencia trigonométrica, y tal como se muestra en la figura, se pueden definir las razones trigonométricas de la siguiente manera:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OP}} = \frac{y}{1} = y \Rightarrow y = sen\alpha$$

El valor de $\text{sen}\,\alpha$ está representado por la ordenada del punto P.

$$\cos\ \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OP}} = \frac{x}{1} = x \Rightarrow x = \cos\alpha$$

El valor de $\cos\alpha$ está representado por la abscisa del punto P.

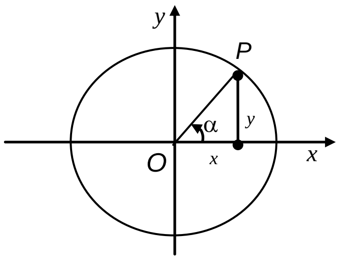
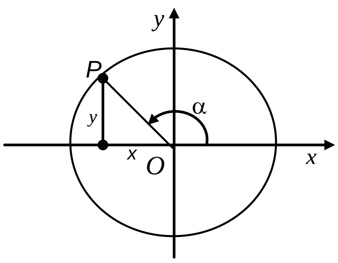
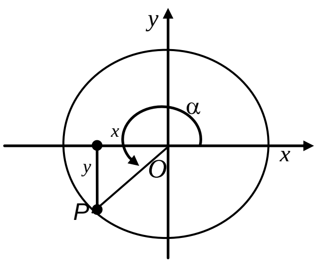
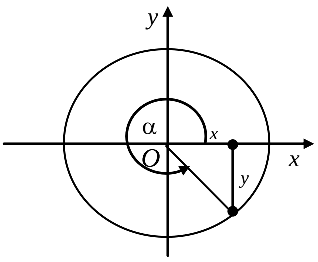
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}} = \frac{y}{x} \Rightarrow tg\alpha = \frac{y}{x}\ ,\ x \neq 0$$

El valor de $tg\alpha$ es el cociente entre la ordenada y la abscisa del punto P.

Signos de las razones trigonométricas según el cuadrante

Al representar la circunferencia trigonométrica observamos que ésta queda dividida en cuatro partes iguales, cada una de ellas se denomina **cuadrante.**

Los signos de las razones trigonométricas tienen que ver con las abscisas y ordenadas del punto *P,* y estas coordenadas tendrán distintos signos según en que cuadrante esté ubicado *P.*

CUADRANTE	*“x”; “y”*	*sen ; cosec*	*cos ; sec*	*tg ; ctg*
	*x>0 ; y>0*	+	+	+
	*x<0 ; y>0*	+	-	-
	*x<0 ; y<0*	-	-	+
	*x>0 ; y<0*	-	+	-

Valores de las razones trigonométricas de ángulos notables

	0 rad	$\frac{\pi}{6}$ rad	$\frac{\pi}{4}$ rad	$\frac{\pi}{3}$ rad	$\frac{\pi}{2}$ rad	π rad	$\frac{3\pi}{2}$ rad	2π rad
$sen\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	No está definido.	0	No está definido.	0
$ctg\alpha$	No está definido.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	No está definido.	0	No está definido.
$\sec\alpha$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	No está definido.	-1	No está definido.	1
$\cos ec\alpha$	No está definido.	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1	No está definido.	-1	No está definido.

RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

Aplicando el Teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo PQO se tiene que:

$$\overline{PQ}^2 + \overline{OQ}^2 = \overline{OP}^2$$

De donde se deduce que: $\boxed{sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$ (1)

llamada **relación fundamental o relación pitagórica.**

y como $tg\alpha = \dfrac{\overline{PQ}}{\overline{OQ}}$ se tiene que $\boxed{tg\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha}}$

Además a partir de la ecuación (1) podemos deducir:

$$sen\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$
$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-sen^2\alpha}$$

Si en (1) dividimos ambos miembros por $sen^2\alpha$ se tiene que:

$$\frac{sen^2\alpha + \cos^2\alpha}{sen^2\alpha} = \frac{1}{sen^2\alpha} \quad \text{entonces} \quad 1 + \cot g^2\alpha = \cos ec^2\alpha$$

Si en (1) dividimos ambos miembros por $\cos^2\alpha$ se tiene que:

$$\frac{sen^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \text{entonces} \quad tg^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

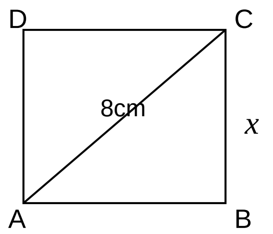
Luego:

$$1 + \cot g^2\alpha = \cos ec^2\alpha$$

$$tg^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha$$

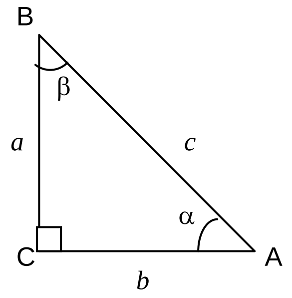
ACTIVIDADES

- **Actividad 1**: Calcular el valor de x en el siguiente cuadrado.



- **Actividad 2:** Completar la tabla utilizando únicamente los datos. (Usar la figura del triángulo rectángulo como referencia)

α	β	*A*	*B*	*c*
30º			15,2 cm	
		1,7 dm		0,20 m
	60º	5,5 cm		
			20 cm	2,5 dm



- **Actividad 3:** Determinar el cuadrante en que se encuentra el ángulo α en cada uno de los siguientes casos.

a) $sen\alpha < 0$ y $\cos\alpha > 0$ …………………………………………..

b) $tg\alpha < 0$ y $\cos\alpha < 0$ …………………………………………..

c) $\sec\alpha < 0$ y $\cos ec\alpha < 0$ …………………………………………..

- **Actividad 4:** Hallar las razones trigonométricas del ángulo “α” de un triángulo rectángulo sabiendo que su hipotenusa es el doble de su cateto opuesto que mide 9m.

- **Actividad 5:** Hallar las razones trigonométricas de los ángulos agudos “α” y “β” de un triángulo rectángulo ACB, recto en C, sabiendo que el cateto adyacente al ángulo “α” mide 8m y la hipotenusa mide $8\sqrt{2}$ m

- **Actividad 6:** En el triángulo rectángulo ABC recto en B, si $\cos C = \frac{3}{5}$, hallar las razones trigonométricas del ángulo A.

- **Actividad 7**: <u>Plantear y resolver las siguientes situaciones</u>:

  a) Al moverse un péndulo de 45cm de longitud, forma un ángulo de 30º con la vertical. En dicha situación ¿cuánto sube el péndulo?

  b) Una torre de 130m de altura está situada en la orilla de un lago. Desde la punta de la torre, el ángulo de depresión de un objeto en la orilla opuesta del lago es de 30º. ¿Cuál es el ancho del lago?

  c) Desde un punto al ras del suelo, los ángulos de elevación que presenta la base y la punta de un mástil de 6m de altura, colocado sobre un acantilado son 30º y 45º. Estimar la altura del acantilado.

  d) Una escalera de apoyo forma un ángulo de 60º con el piso y llega en la pared hasta una altura de 3m. Averiguar la longitud de la misma.

  e) El perímetro de un triángulo isósceles es de 26cm y su base mide 10 cm. ¿Cuál es el valor de sus ángulos interiores?

  f) A cierta hora el Sol se observa con un ángulo de elevación de 45º. Calcular la altura de un árbol que proyecta una sombra de 10,89m.

Bibliografía

- ✓ Vazquez de Tapia, Nelly. Tapia de Bibiloni, Alicia. Tapia, Carlos Alberto. “Matemática 3”. Editorial Estrada. Buenos Aires. Argentina. 1980.
- ✓ Vazquez de Tapia, Nelly. Tapia de Bibiloni, Alicia. Tapia, Carlos Alberto. “Matemática 4”. Editorial Estrada. Buenos Aires. Argentina. 1983.
- ✓ Dolciani, Mary. Berman, Simón. Wooton, William. “Álgebra Moderna y Trigonometría”. Publicaciones Cultural S.A. México, D.F.
- ✓ Arroyo; D; Berio; A; Colombo; M; D’Albano. “Matemática 3”.Editorial Puerto de Palos. Buenos Aires 2001.
- ✓ Berio; A; Colombo; M; D’Albano; C; Sardella; O. “Matemática 2”.Editorial Puerto de Palos. Buenos Aires 2001.
- ✓ Berio; A; Colombo; M; D’Albano; C; Sardella; O; Zapico; I. “Matemática 1”.Editorial Puerto de Palos. Buenos Aires 2001.
- ✓ Etchegoyen; S; Fagale; E; Rodríguez; S; Kalan; M; Alonso; M. “Matemática 1”.Editorial Kapeluz. Buenos Aires 1997.
- ✓ Fernández de Musomecci; D; Kempf de Gil; I; Mulki; L. “Matemática para ingresantes”. Editorial Magna. Tucuman 2001.
- ✓ Marchetti de De Simone; I; García de Turner; M. “ Matemática 4”. A-Z editora. Buenos Aires 1995.
- ✓ Marchetti de De Simone; I; García de Turner; M. “Matemática 5”. A-Z editora. Buenos Aires 1996.
- ✓ Stewart; J; Redlin; L; Watson; S. “Precálculo”. Editorial Thomson. México D.F. 2002.